

EXAMES DE ANÁLISE MATEMÁTICA III

Jaime E. Villate

*Faculdade de Engenharia
Universidade do Porto*

22 de Fevereiro de 1999

Resumo

Estes são alguns dos exames e testes da disciplina de **Análise Matemática III**, do curso de engenharia química, e as suas resoluções. Análise Matemática III consiste num semestre de introdução às equações diferenciais e equações de diferenças.

1 Ano lectivo 1997-98

1.1 1º Exame, 16-1-98

Duração: 2 horas e meia. Com consulta de **tabelas de transformadas** e uso de qualquer tipo de calculadora.

1. (3 valores) Encontre a solução da seguinte equação integral

$$y(t) = 4t^2 - 4 \int_0^t e^{4(t-s)} y(s) ds$$

2. (5 valores) Resolva o seguinte sistema de equações

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. (4 valores)

- (a) Demonstre que a função

$$v(x, t) = e^{-4t} \sin x \quad (t > 0) \quad (0 < x < \pi)$$

é a solução do problema

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad v(x, 0) = \sin x \quad v(0, t) = v(\pi, t) = 0$$

- (b) Enuncie o teorema de Picard para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

4. (3 valores) Encontre a solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y^3 - 2x} \quad y(2) = 1$$

5. (5 valores) Admita que a população actual de baleias no mundo é 1000 e que cada ano o aumento natural (nascimentos e mortes naturais) da população é de 25%. Admita também que o número de baleias abatidas pelos pescadores cada ano é de 300 e que esta tendência vai se manter nos próximos anos. Calcule a população, P_n (onde n é o número de anos a partir do ano actual) durante os próximos anos.

1.2 Resolução do exame do 16-1-98

1. O integral no lado direito da equação é um integral de convolução entre as funções y e $\exp(4t)$

$$y(t) = 4t^2 - 4 e^{4t} \star y(t)$$

calculando a transformada de Laplace nos dois lados da equação, obtemos uma equação algébrica

$$Y(s) = \frac{8}{s^3} - \frac{4}{s-4} Y(s)$$

onde $Y(s)$ é a transformada de y . Multiplicando os dois lados da equação por $s-4$ obtemos

$$sY = \frac{8(s-4)}{s^3}$$

e resolvendo para Y

$$Y = \frac{8}{s^3} - \frac{32}{s^4}$$

a transformada inversa dá a solução da equação

$$y = 4t^2 - \frac{16}{3}t^3$$

2. Usando o operador D (derivada em função do tempo), as duas equações diferenciais são

$$Dx_1 = -9x_2 + t$$

$$Dx_2 = x_1 + 2$$

para eliminar uma das variáveis, podemos multiplicar a segunda equação pelo operador D e substituir Dx_1 usando a primeira equação

$$D(Dx_2) = Dx_1 \implies D^2x_2 = -9x_2 + t$$

esta última é uma equação diferencial ordinária, linear de coeficientes constantes. O polinómio característico é

$$\lambda^2 = -9$$

com duas raízes imaginárias $\pm 3i$. A solução geral da equação homogénea é

$$x_2 = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)$$

para encontrar uma solução particular podemos usar o método dos **coeficientes indeterminados**. Considerando o lado direito da equação e a solução da equação homogénea, concluímos que existe uma solução da forma

$$x_2 = A + Bt$$

onde os coeficientes A e B encontram-se por substituição na equação diferencial

$$0 = -9(A + Bt) + t \implies A = 0 \quad B = \frac{1}{9}$$

a solução geral é

$$x_2 = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t) + \frac{t}{9}$$

As constantes calculam-se a partir das condições iniciais:

$$x_2(0) = C_1 = 1$$

$$Dx_2(0) = 3C_2 + \frac{1}{9} = x_1(0) + 2 = 0 + 2 \implies C_2 = \frac{17}{27}$$

e finalmente obtemos a solução para x_2 é

$$x_2 = \cos(3t) + \frac{17}{27} \sin(3t) + \frac{t}{9}$$

Para calcular x_1 podemos usar a segunda equação no sistema original

$$x_1 = Dx_2 - 2 = -3 \sin(3t) + \frac{17}{9} \cos(3t) - \frac{17}{9}$$

3. (a) Para que a função dada seja solução do problema, o primeiro que devemos mostrar é que verifica as condições fronteira dadas:

$$v(x, 0) = e^0 \sin x = \sin x$$

$$v(0, t) = e^{-4t} \sin 0 = 0$$

$$v(\pi, t) = e^{-4t} \sin \pi = 0$$

a seguir calculamos as derivadas que aparecem na equação

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -4e^{-4t} \sin x$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{-4t} \cos x) = -e^{-4t} \sin x$$

assim vemos que a função dada verifica a equação diferencial e como também verifica as condições fronteira, é a solução do problema dado.

- (b) **Teorema de Picard:** Dada uma equação diferencial ordinária na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

e uma condição inicial

$$y(x_0) = y_0$$

se a função $f(x, y)$ e a sua derivada parcial $\partial f / \partial y$ são contínuas no ponto (x_0, y_0) , existe solução única do problema de valor inicial, numa vizinhança do ponto (x_0, y_0) .

4. A equação não corresponde a nenhum dos casos: variáveis separáveis, homogénea, linear ou equação de Bernoulli. Também não é exacta pois

$$\frac{\partial}{\partial x}(2x - y^3) = 2 \neq \frac{\partial y}{\partial y}$$

Se invertermos a equação obtemos

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^3 - 2x}{y}$$

a qual é uma equação linear; escrita na forma padrão

$$\frac{dx}{dy} + \frac{2}{y}x = y^2$$

vemos que o factor integrante é

$$\mu = \exp\left(\int \frac{2}{y} dy\right) = y^2$$

multiplicando os dois lados da equação por μ obtemos

$$\frac{d}{dy}(y^2 x) = y^4$$

$$\implies y^2 x = \frac{y^5}{5} + C$$

Para calcular o valor da constante de integração, substituímos a condição inicial

$$2 = \frac{1}{5} + C \implies C = \frac{9}{5}$$

e a solução (em forma implícita) é

$$5y^2 x = y^5 + 9$$

5. Se no ano n a população de baleias fosse P_n , o aumento da população durante esse ano, devido a nascimentos e mortes naturais, seria $0,25P_n$. O aumento (ou diminuição) da população durante esse ano seria

$$0,25P_n - 300$$

mas por outro lado o aumento da população durante o período n também deverá ser igual a

$$P_{n+1} - P_n$$

combinando estas duas expressões obtemos uma equação de diferenças

$$P_{n+1} - P_n = 0,25P_n - 300$$

se

$$n = 0$$

representa o ano actual, a condição inicial necessária para resolver a equação de diferenças é

$$P_0 = 1000$$

Para resolver a equação podemos usar a transformada \mathbb{Z}

$$zp - 1000z - p = 0,25p - \frac{300z}{z-1}$$

onde $p(z)$ é a transformada da sucessão P_n . A equação anterior é uma equação algébrica que se resolve facilmente para p

$$\begin{aligned} p &= \frac{1000z}{z-1,25} - \frac{300z}{(z-1)(z-1,25)} \\ &= \frac{1000z}{z-1,25} - 1200z \frac{(z-1) - (z-1,25)}{(z-1)(z-1,25)} \\ &= -\frac{200z}{z-1,25} + \frac{1200}{z-1} \end{aligned}$$

a transformada inversa é

$$P_n = 1200 - 200 \left(\frac{5}{4}\right)^n$$

obviamente a população não pode ser negativa e portanto a expressão anterior só poderá ser válida para alguns valores de n tais que

$$1200 - 200 \left(\frac{5}{4}\right)^n \geq 0$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^n \leq 6$$

$$n \ln \frac{5}{4} \leq \ln 6 \implies n \leq 8,03$$

logo a solução do problema é

$$P_n = \begin{cases} 1200 - 200(1,25)^n & 0 \leq n \leq 8 \\ 0 & n > 8 \end{cases}$$

1.3 2º Exame, 7-2-98

Duração: 2 horas e meia. Com consulta de **tabelas de transformadas** e uso de qualquer tipo de calculadora.

1. (3 valores) Encontre a solução geral da seguinte equação de diferenças

$$y_{n+2} + y_n = n^2$$

2. (5 valores) Encontre a solução geral da seguinte equação diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = x \cos(2x)$$

3. (5 valores) Resolva o problema:

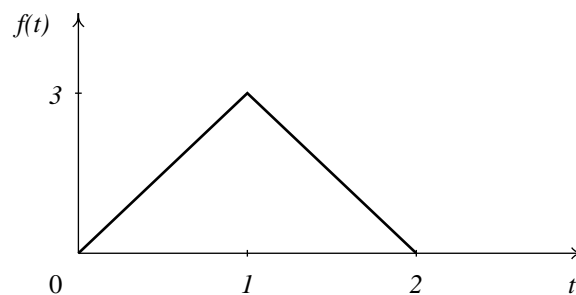
$$\frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = xy e^x \quad (y > 0, x > 0) \quad v(x, 0) = 0 \quad v(0, y) = 0$$

4. (3 valores) Dada uma função $f(x)$, parcelarmente contínua, definida no domínio $0 < x < L$, defina as séries de Fourier seno e co-seno da função, e explique as diferenças entre as duas representações.

5. (4 valores) Resolva o problema de valor inicial

$$y' + 4y = f(t) \quad y(1) = 0$$

onde a função $f(t)$ é definida no seguinte gráfico



1.4 Exame de recurso, 21-2-98

Duração: 2 horas e meia. Com consulta de **tabelas de transformadas** e uso de qualquer tipo de calculadora.

1. (4 valores) Encontre a solução geral da seguinte equação diferencial

$$(12x - 3y - 3)dx + (x - 2y + 12)dy = 0$$

2. (5 valores) Resolva o problema

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1, t > 0) \quad v(0, t) = v(1, t) = 0 \quad (1)$$

$$v(x, 0) = x(1 - x) \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = \sin(7\pi x) \quad (2)$$

3. (3 valores) Encontre a solução do seguinte problema de valores iniciais

$$y'' + y = t - t u(t - 2) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

4. (4 valores) Encontre as trajectórias ortogonais da família de curvas $x^2 + y^2 = kx$, onde k é um parâmetro real.

5. (4 valores) Considere a seguinte família de equações diferenciais, onde n é um parâmetro inteiro positivo

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$$

Demonstre que existe uma família de polinómios de grau n que são soluções das respectivas equações (não precisa calcular os polinómios, só mostrar que existem).

2 Ano lectivo 1998-99

2.1 1º Teste, 29-10-98

Duração: 1 hora. Sem consulta. Pode usar qualquer tipo de calculadora para resolver primitivas.
Encontre a solução geral das seguintes equações:

1. $x \, dy - (y + x^3 e^{2x}) \, dx = 0$

2. $2y'' - 8y' + 8y = 4 e^{2x} \cos(3x)$

2.2 2º Teste, 10-12-98

Duração: 1 hora. Com consulta de **tabelas de transformadas** e uso de qualquer tipo de calculadora. **Resolva o problema 1 e unicamente um dos problemas 2 ou 3**

1. (10 valores, obrigatório)

(a) Encontre os vectores próprios da matriz:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

(b) A **função de erro** é a solução do problema:

$$y'' + 2xy' = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = \frac{2}{\pi^{1/2}}$$

Encontre a série de Maclaurin da função de erro.

2. (10 valores, facultativo) Calcule a transformada inversa de Laplace de:

$$\frac{20s e^{-5s}}{(s-1)(s^2-4s+13)}$$

3. (10 valores, facultativo) Encontre a solução do problema:

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 13y_n = 10 \quad y_0 = y_1 = 0$$

2.3 Resolução do teste de 10-12-98

1. (a) A equação característica é:

$$\begin{vmatrix} -(1+\lambda) & 0 & 3 \\ 1 & (1-\lambda) & 1 \\ -4 & 0 & (6-\lambda) \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$$

e, portanto, os valores próprios são

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3$$

os vectores próprios correspondentes a $\lambda_1 = 1$ são as soluções do sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right]$$

para $\lambda_2 = 2$ temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right]$$

e para $\lambda_3 = 3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c} 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \right]$$

Os vectores próprios são

$$c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c_3 \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

onde c_1 , c_2 e c_3 são três constantes arbitrárias.

(b) O ponto $x = 0$ é um ponto ordinário e, assim, a solução geral da equação diferencial pode ser representada por uma série de Maclaurin:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

As condições iniciais definem os valores das duas primeiras constantes

$$a_0 = y(0) = 0 \quad a_1 = y'(0) = \frac{2}{\pi^{1/2}}$$

substituindo a série de Maclaurin na equação diferencial obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} + 2n a_n] x^n &= 0 \end{aligned}$$

A fórmula de recorrência é:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + 2n a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ou, em função de $b_n = n a_n$,

$$(n+1)b_{n+2} + 2b_n = 0$$

Como $b_0 = a_0 = 0$, todos os termos de ordem par serão nulos. Para $n = 2m + 1$ temos:

$$2(m+1)b_{2m+3} + 2b_{2m+1} = 0$$

e definindo $c_m = m!b_{2m+1}$ obtemos uma equação de coeficientes constantes:

$$c_{m+1} + c_m = 0 \implies c_m = (-1)^m c_0$$

onde

$$c_0 = b_1 = a_1 = \frac{2}{\pi^{1/2}}$$

O termo geral da sucessão a_{2m+1} é:

$$a_{2m+1} = \frac{b_{2m+1}}{2m+1} = \frac{c_m}{m!(2m+1)} = \frac{2(-1)^m}{\pi^{1/2} m!(2m+1)}$$

e a série de Maclaurin da função de erro é:

$$\frac{2}{\pi^{1/2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{m!(2m+1)}$$

Outra forma de obter a série consiste em resolver a equação diferencial por separação de variáveis para obter:

$$y(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

seguidamente substitui-se a série de Maclaurin para a função exponencial e integra-se cada termo na série.

2. Usando expansão em frações parciais:

$$\frac{20s}{(s-1)(s^2-4s+13)} = \frac{A}{s-1} + \frac{3B}{(s-2)^2+9} + \frac{C(s-2)}{(s-2)^2+9}$$

multiplicando os dois lados por $(s-1)$ e substituindo $s=1$ obtemos:

$$A = 2$$

para $s=2$ temos:

$$\frac{40}{9} = 2 + \frac{3B}{9} \implies B = \frac{22}{3}$$

e para $s=0$:

$$0 = -2 + \frac{22}{13} - \frac{2C}{13} \implies C = -2$$

Usando a tabela de transformadas, a transformada inversa é:

$$u(t-5) \left\{ e^{(t-5)} + e^{2(t-5)} \left[\frac{22}{3} \sin(3t-15) - 2 \cos(3t-15) \right] \right\}$$

3. A transformada \mathbb{Z} da equação é:

$$z^2 \bar{y} - 4z \bar{y} + 13 \bar{y} = \frac{10z}{z-1}$$

e, portanto, a transformada da sucessão y_n é:

$$\bar{y} = \frac{10z}{(z-1)[(z-2)^2+9]} = \frac{Az}{z-1} + \frac{3Bz}{(z-2)^2+9} + \frac{Cz(z-2)}{(z-2)^2+9}$$

multiplicando os dois lados por $z - 1$ e substituindo $z = 1$, obtemos o valor da constante $A = 10$.
Para $z = 2$ temos:

$$\frac{10}{9} = 10 + \frac{3B}{9} \quad \Longrightarrow \quad B = -\frac{80}{3}$$

Finalmente, dividindo por z e substituindo $z = 0$:

$$-\frac{10}{13} = -10 - \frac{80}{13} - \frac{2C}{13} \quad \Longrightarrow \quad C = 100$$

Usando a tabela para calcular as transformadas inversas obtemos:

$$y_n = 10 + 10 r^n \left[10 \cos(n\theta) - \frac{8}{3} \sin(n\theta) \right]$$

onde $r = 13^{1/2}$ e $\theta = \arctg(1, 5)$.

2.4 1º Exame, 15-1-99

Duração: 2 horas e meia. Com consulta de **tabelas de transformadas** e uso de qualquer tipo de calculadora.

1. (3 valores) Resolva a equação diferencial ordinária

$$(x + 2)^2 y' = 4y + (x + 2)^7$$

com a condição inicial $y(0) = 8$

2. (4 valores) Calcule a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ e^{-2t}, & 1 \leq t \leq 2 \\ 2, & 2 \leq t \end{cases}$$

3. (4 valores) Encontre a solução geral do sistema de equações diferenciais $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, onde \mathbf{A} é a seguinte matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. (4 valores) Sabendo que $y_0 = 2$, encontre a solução da seguinte equação de diferenças:

$$(1 + n)y_{n+1} + (2n + 8)y_n = 0$$

5. (5 valores) Resolva a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

para as seguintes condições fronteira:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, y) = u(1 - y) \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad T(2, y) = 0 \quad T(x, 2) = 0$$

2.5 Resolução do exame do 15-1-99

1. A equação pode ser escrita na forma:

$$y' - \frac{4}{(x+2)^2}y = (x+2)^5$$

a qual é uma equação linear de primeira ordem. O factor integrante é igual a

$$\mu = \exp\left(-4 \int \frac{dx}{(x+2)^2}\right) = e^{4/(x+2)}$$

multiplicando os dois lados da equação por μ e agrupando os termos no lado esquerdo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[y e^{4/(x+2)}] &= (x+2)^5 e^{4/(x+2)} \\ \implies y e^{4/(x+2)} &= \int (x+2)^5 e^{4/(x+2)} dx + C \end{aligned}$$

A primitiva não pode ser calculada analiticamente e, assim, convém escrever explicitamente os limites de integração, desde um valor arbitrário x_0 até a variável x . Para facilitar o cálculo da constante C , escolhemos $x_0 = 0$ que conduz à solução

$$y = e^{-4/(x+2)} \left(\int_0^x (t+2)^5 e^{4/(t+2)} dt + C \right)$$

O valor da constante C obtém-se substituindo a condição inicial:

$$y(0) = C e^{-2} = 8 \implies C = 8 e^2$$

2. Usando a função **degrau unitário**, a função $f(t)$ escreve-se

$$f(t) = t[1 - u(t-1)] + e^{-2t}[u(t-1) - u(t-2)] + 2u(t-2)$$

Para poder usar a propriedade de **deslocamento no domínio do tempo**, é preciso re-escrever a função na forma

$$f(t) = t - [(t-1) + 1]u(t-1) + e^{-2}e^{-2(t-1)}u(t-1) - e^{-4}e^{-2(t-2)}u(t-2) + 2u(t-2)$$

usando a tabela de transformadas de Laplace, obtemos a transformada de f :

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + e^{-s} \left(\frac{e^{-2}}{s+2} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \right) + e^{-2s} \left(\frac{2}{s} - \frac{e^{-4}}{s+2} \right)$$

3. A equação característica é:

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0 & -1 \\ 0 & (2-\lambda) & 0 \\ 1 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(\lambda-1)^2 + 1] = 0$$

e, portanto, os valores próprios são

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1 + i \quad \lambda_3 = 1 - i$$

um vector próprio (\mathbf{v}_1) correspondente a $\lambda_1 = 2$ obtém-se a partir da solução do sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \implies \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e a solução particular correspondente a \mathbf{v}_1 é

$$e^{\mathbf{A}t} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Outras duas soluções linearmente independentes podem ser obtidas a partir de λ_2 ou λ_3 . Para $\lambda_3 = 1 - i$ obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & (1+i) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & i & 0 \end{array} \right] \implies \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}$$

A partir de \mathbf{w} pode obter-se uma solução particular complexa:

$$e^{\mathbf{A}t} \mathbf{w} = e^{(1-i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos t - i \sin t \\ 0 \\ \sin t + i \cos t \end{bmatrix}$$

As partes real e imaginária desta solução são também soluções, e junto com a solução obtida a partir de λ_1 , constituem um conjunto fundamental de soluções do sistema:

$$e^{\mathbf{A}t} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e^t \begin{bmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad e^t \begin{bmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{bmatrix}$$

A solução geral do sistema é qualquer combinação linear do conjunto fundamental de soluções:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^t \cos t & -e^t \sin t \\ e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

4. Os dois factores lineares que aparecem na equação, podem ser escritos na forma f_{n+1}/f_n usando factoriais

$$n+1 = \frac{(n+1)!}{n!} \quad n+4 = \frac{(n+4)!}{(n+3)!}$$

Substituindo na equação de diferenças e re-agrupando termos obtemos

$$\frac{(n+1)!}{(n+4)!} y_{n+1} + 2 \frac{n!}{(n+3)!} y_n = 0$$

usando a substituição

$$a_n = \frac{n!}{(n+3)!} y_n$$

obtemos uma equação de coeficientes constantes para a sucessão a_n :

$$a_{n+1} + 2a_n = 0$$

A equação característica tem uma única raiz $\lambda = -2$ e, assim, a solução geral é

$$a_n = a_0 (-2)^n \implies y_n = a_0 \frac{(n+3)! (-2)^n}{n!}$$

Para $n = 0$ obtém-se ($y_0 = 6a_0 = 2$) e, portanto, $a_0 = 1/3$

$$y_n = \frac{(n+3)! (-2)^n}{3 n!}$$

5. A equação pode ser resolvida usando a transformada de Fourier de $T(x, y)$. em ordem a y

$$t_n = \langle T(x, y), \phi_n(y) \rangle = \int_0^2 T(x, y) \phi_n(y) dy$$

Atendendo às condições fronteira do problema, arbitramos as seguintes condições para as funções próprias

$$\phi_n'(0) = 0 \quad \phi_n(2) = 0$$

que conduzem às seguintes funções próprias e valores próprios

$$\phi_n(y) = \cos(\lambda_n y) \quad \lambda_n = (2n + 1) \frac{\pi}{4}$$

as transformadas das derivadas parciais de T são:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_n = \frac{d^2 t_n}{dx^2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_n &= \int_0^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \cos(\lambda_n y) dy = \frac{\partial T}{\partial y} \cos(\lambda_n y) \Big|_0^2 + \lambda_n \int_0^2 \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\lambda_n y) dy \\ &= \lambda_n T \sin(\lambda_n y) \Big|_0^2 - \lambda_n^2 \int_0^2 T \cos(\lambda_n y) dy = -\lambda_n^2 t_n \end{aligned}$$

A transformada de Fourier da equação de Laplace é

$$\frac{d^2 t_n}{dx^2} - \lambda_n^2 t_n = 0$$

esta é uma equação diferencial ordinária, linear, de coeficientes constantes. As duas raízes do polinómio característico são λ_n e $-\lambda_n$, e a solução geral é

$$t_n = A_n e^{\lambda_n x} + B_n e^{-\lambda_n x}$$

As condições fronteira para t_n obtêm-se a partir das transformadas de Fourier das condições fronteira do problema:

$$t_n(2) = \langle T(2, y), \phi_n(y) \rangle = 0$$

$$\frac{dt_n(0)}{dx} = \langle u(1 - y), \phi_n(y) \rangle = \int_0^1 \cos(\lambda_n y) dy = \frac{\sin \lambda_n}{\lambda_n}$$

substituindo estas condições na solução geral $t_n(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} A_n - B_n &= \frac{\sin \lambda_n}{\lambda_n^2} \\ A_n e^{2\lambda_n} + B_n e^{-2\lambda_n} &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema, obtemos as constantes A_n , B_n e a solução particular

$$t_n = \frac{\sin \lambda_n e^{-2\lambda_n}}{2\lambda_n^2 \cosh(2\lambda_n)} e^{\lambda_n x} - \frac{\sin \lambda_n e^{2\lambda_n}}{2\lambda_n^2 \cosh(2\lambda_n)} e^{-\lambda_n x}$$

A função $T(x, y)$ é dada pela série de Fourier

$$T(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n}{\lambda_n^2 \cosh(2\lambda_n)} \sinh[\lambda_n(x - 2)] \cos(\lambda_n y)$$

2.6 2º Exame, 2-2-99

Duração: 2 horas e meia. Com consulta de [tabelas de transformadas](#) e uso de qualquer tipo de calculadora.

1. (4 valores) Encontre a solução geral da equação diferencial linear

$$(x^2 - 3x + 2)y'' + xy' - y = 3x$$

sabendo que as seguintes funções são soluções particulares da equação homogénea correspondente:

$$y_1 = x \quad y_2 = \frac{1}{x-2}$$

2. (4 valores) Encontre a solução do seguinte problema de valores iniciais, para qualquer função $f(t)$ parcelarmente contínua e de ordem exponencial

$$y'' + y' - 2y = f(t) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

3. (4 valores) Encontre a solução do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 3x_2 + 2t^2 + t & x_1(0) &= 5 \\ x_2' &= x_1 + 4x_2 + t^2 + t - 1 & x_2(0) &= 1 \end{aligned}$$

4. (4 valores) Um doente toma diariamente 100 mg de uma certa droga para controlar a sua asma. A droga é eliminada do corpo do doente de forma que cada dia a quantidade de droga no corpo diminui 25 %. Seja y_n a quantidade de droga no corpo do doente imediatamente depois de tomar a dose número $n + 1$, n dias depois de começar o tratamento (assim, imediatamente a seguir à primeira dose $y_0 = 100$). Calcule a quantidade limite de droga no corpo do doente (y_∞). Qual devia ser a dose diária da droga para se obter um limite de 800 mg da droga no corpo do doente?

5. (4 valores) Resolva a equação de derivadas parciais:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3xy = e^{-2x}$$

no domínio $0 \leq x \leq 1$ e y qualquer número real, com as seguintes condições fronteira:

$$v(0, y) = 4 \sin y \quad \frac{\partial v}{\partial x}(1, y) = 6(\sin y - y)$$