EXAMES DE ANÁLISE MATEMÁTICA III

Jaime E. Villate
Faculdade de Engenharia
Universidade do Porto

22 de Fevereiro de 1999

Resumo

Estes são alguns dos exames e testes da disciplina de Análise Matemática III, do curso de engenharia química, e as suas resoluções. Análise Matemática III consiste num semestre de introdução às equações diferenciais e equações de diferenças.

1 Ano lectivo 1997-98

1.1 1º Exame, 16-1-98

Duração: 2 horas e meia. Com consulta de tabelas de transformadas e uso de qualquer tipo de calculadora.

1. (3 valores) Encontre a solução da seguinte equação integral

$$y(t) = 4t^2 - 4\int_0^t \mathrm{e}^{4(t-s)} y(s) ds$$

2. (5 valores) Resolva o seguinte sistema de equações

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. (4 valores)

   (a) Demonstre que a função

   $$v(x,t) = \mathrm{e}^{-4t} \sin\, x \qquad (t > 0) \qquad (0 < x < \pi)$$

   é a solução do problema

   $$\frac{\partial v}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad v(x,0) = \sin\, x \qquad v(0,t) = v(\pi,t) = 0$$

   (b) Enuncie o teorema de Picard para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

4. (3 valores) Encontre a solução da equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{y^3 - 2x} \qquad y(2) = 1$$

5. (5 valores) Admita que a população actual de baleias no mundo é 1000 e que cada ano o aumento natural (nascimentos e mortes naturais) da população é de 25%. Admita também que o número de baleias abatidas pelos pescadores cada ano é de 300 e que está tendência vai se manter nos próximos anos. Calcule a população, P_n (onde n é o número de anos a partir do ano actual) durante os próximos anos.

1.2 Resolução do exame do 16-1-98

1. O integral no lado direito da equação é um integral de convolução entre as funções y e $\exp(4t)$

$$y(t) = 4t^2 - 4\ \mathrm{e}^{4t} \star y(t)$$

calculando a transformada de Laplace nos dois lados da equação, obtemos uma equação algébrica

$$Y(s) = \frac{8}{s^3} - \frac{4}{s-4} Y(s)$$

onde $Y(s)$ é a transformada de y. Multiplicando os dois lados da equação por $s-4$ obtemos

$$sY = \frac{8(s-4)}{s^3}$$

e resolvendo para Y

$$Y = \frac{8}{s^3} - \frac{32}{s^4}$$

a transformada inversa dá a solução da equação

$$y = 4t^2 - \frac{16}{3} t^3$$

2. Usando o operador D (derivada em função do tempo), as duas equações diferenciais são

$$\begin{aligned} Dx_1 &= -9x_2 + t \\ Dx_2 &= x_1 + 2 \end{aligned}$$

para eliminar uma das variáveis, podemos multiplicar a segunda equação pelo operador D e substituir Dx_1 usando a primeira equação

$$D(Dx_2) = Dx_1 \quad \Longrightarrow \quad D^2 x_2 = -9x_2 + t$$

esta última é uma equação diferencial ordinária, linear de coeficientes constantes. O polinómio característico é

$$\lambda^2 = -9$$

com duas raizes imaginárias $\pm 3i$. A solução geral da equação homogénea é

$$x_2 = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)$$

para encontrar uma solução particular podemos usar o método dos coeficientes indeterminados. Considerando o lado direito da equação e a solução da equação homogénea, concluimos que existe uma solução da forma

$$x_2 = A + Bt$$

onde os coeficientes A e B encontram-se por substituição na equação diferencial

$$0 = -9(A + Bt) + t \qquad \Longrightarrow A = 0 \qquad B = \frac{1}{9}$$

a solução geral é

$$x_2 = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t) + \frac{t}{9}$$

As constantes calculam-se a partir das condições iniciais:

$$x_2(0) = C_1 = 1$$

$$Dx_2(0) = 3C_2 + \frac{1}{9} = x_1(0) + 2 = 0 + 2 \implies C_2 = \frac{17}{27}$$

e finalmente obtemos a solução para x_2 é

$$x_2 = \cos(3t) + \frac{17}{27}\sin(3t) + \frac{t}{9}$$

Para calcular x_1 podemos usar a segunda equação no sistema original

$$x_1 = Dx_2 - 2 = -3\sin(3t) + \frac{17}{9}\cos(3t) - \frac{17}{9}$$

3. (a) Para que a função dada seja solução do problema, o primeiro que devemos mostrar é que verifica as condições fronteira dadas:

$$v(x,0) = e^0 \sin\ x = \sin\ x$$
$$v(0,t) = e^{-4t}\sin\ 0 = 0$$
$$v(\pi,t) = e^{-4t}\sin\ \pi = 0$$

a seguir calculamos as derivadas que aparecem na equação

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -4e^{-4t}\sin\ x$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{-4t}\cos\ x) = -e^{-4t}\sin x$$

assim vemos que a função dada verifica a equação diferencial e como também verifica as condições fronteira, é a solução do problema dado.

(b) **Teorema de Picard:** Dada uma equação diferencial ordinária na forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$$

e uma condição inicial

$$y(x_o) = y_o$$

se a função $f(x,y)$ e a sua derivada parcial $\partial f/\partial y$ são contínuas no ponto (x_o, y_o), existe solução única do problema de valor inicial, numa vizinhança do ponto (x_o, y_o).

4. A equação não corresponde a nenhum dos casos: variáveis separáveis, homogénea, linear ou equação de Bernoulli. Também não é exacta pois

$$\frac{\partial}{\partial x}(2x - y^3) = 2 \neq \frac{\partial y}{\partial y}$$

Se invertermos a equação obtemos

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{y^3 - 2x}{y}$$

a qual é uma equação linear; escrita na forma padrão

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{2}{y}x = y^2$$

vemos que o factor integrante é

$$\mu = \exp\left(\int \frac{2}{y}dy\right) = y^2$$

multiplicando os dois lados da equação por μ obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(y^2 x) = y^4$$

$$\Longrightarrow\ y^2x = \frac{y^5}{5} + C$$

Para calcular o valor da constante de integração, substituimos a condição inicial

$$2 = \frac{1}{5} + C \quad\Longrightarrow\quad C = \frac{9}{5}$$

e a solução (em forma implícita) é

$$5y^2x = y^5 + 9$$

5. Se no ano n a população de baleias fosse P_n, o aumento da população durante esse ano, devido a nascimentos e mortes naturais, seria $0,25P_n$. O aumento (ou diminuição) da população durante esse ano seria

$$0,25P_n - 300$$

mas por outro lado o aumento da população durante o período n também deverá ser igual a

$$P_{n+1} - P_n$$

combinando estas duas expressões obtemos uma equação de diferenças

$$P_{n+1} - P_n = 0,25P_n - 300$$

se

$$n = 0$$

representa o ano actual, a condição inicial necessária para resolver a equação de diferenças é

$$P_0 = 1\,000$$

Para resolver a equação podemos usar a transformada $\mathbb{Z}$

$$zp - 1\,000\,z - p = 0,25\,p - \frac{300\,z}{z-1}$$

onde $p(z)$ é a transformada da sucessão P_n. A equação anterior é uma equação algébrica que se resolve facilmente para p

$$\begin{aligned} p &= \frac{1\,000\,z}{z-1,25} - \frac{300\,z}{(z-1)(z-1,25)} \\ &= \frac{1\,000\,z}{z-1,25} - 1\,200\,z\frac{(z-1)-(z-1,25)}{(z-1)(z-1,25)} \\ &= -\frac{200\,z}{z-1,25} + \frac{1\,200}{z-1} \end{aligned}$$

a transformada inversa é

$$P_n = 1200 - 200\left(\frac{5}{4}\right)^n$$

obviamente a população não pode ser negativa e portanto a expressão anterior só poderá ser válida para alguns valores de n tais que

$$1200 - 200\left(\frac{5}{4}\right)^n \geq 0$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^n \leq 6$$

$$n\ln\frac{5}{4} \leq \ln\ 6 \quad\Longrightarrow\quad n \leq 8,03$$

logo a solução do problema é

$$P_n = \begin{cases} 1200 - 200(1{,}25)^n & 0 \leq n \leq 8 \\ 0 & n > 8 \end{cases}$$

1.3 2º Exame, 7-2-98

Duração: 2 horas e meia. Com consulta de tabelas de transformadas e uso de qualquer tipo de calculadora.

1. (3 valores) Encontre a solução geral da seguinte equação de diferenças

$$y_{n+2} + y_n = n^2$$

2. (5 valores) Encontre a solução geral da seguinte equação diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = x\cos(2x)$$

3. (5 valores) Resolva o problema:

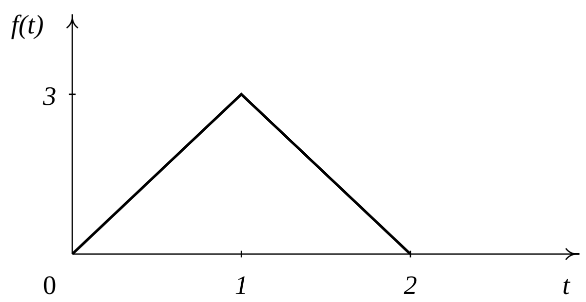
$$\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} = xy\,\mathrm{e}^x \qquad (y > 0, x > 0) \qquad v(x,0) = 0 \qquad v(0,y) = 0$$

4. (3 valores) Dada uma função $f(x)$, parcelarmente contínua, definida no domínio $0 < x < L$, defina as séries de Fourier seno e co-seno da função, e explique as diferenças entre as duas representações.

5. (4 valores) Resolva o problema de valor inicial

$$y' + 4y = f(t) \qquad y(1) = 0$$

onde a função $f(t)$ é definida no seguinte gráfico



1.4 Exame de recurso, 21-2-98

Duração: 2 horas e meia. Com consulta de tabelas de transformadas e uso de qualquer tipo de calculadora.

1. (4 valores) Encontre a solução geral da seguinte equação diferencial

$$(12x - 3y - 3)dx + (x - 2y + 12)dy = 0$$

2. (5 valores) Resolva o problema

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (0 < x < 1, t > 0) \qquad v(0,t) = v(1,t) = 0 \tag{1}$$

$$v(x,0) = x(1-x) \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin(7\pi x) \tag{2}$$

3. (3 valores) Encontre a solução do seguinte problema de valores iniciais

$$y'' + y = t - t\,u(t-2) \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

4. (4 valores) Encontre as trajectórias ortogonais da família de curvas $x^2 + y^2 = kx$, onde k é um parâmetro real.

5. (4 valores) Considere a seguinte família de equações diferenciais, onde n é um parâmetro inteiro positivo

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

Demonstre que existe uma família de polinómios de grau n que são soluções das respectivas equações (não precisa calcular os polinómios, só mostrar que existem).

2 Ano lectivo 1998-99

2.1 1º Teste, 29-10-98

Duração: 1 hora. Sem consulta. Pode usar qualquer tipo de calculadora para resolver primitivas.
Encontre a solução geral das seguintes equações:

1. $x\,\mathrm{d}y - (y + x^3\,\mathrm{e}^{2x})\,\mathrm{d}x = 0$
2. $2y'' - 8y' + 8y = 4\,\mathrm{e}^{2x}\cos(3x)$

2.2 2º Teste, 10-12-98

Duração: 1 hora. Com consulta de tabelas de transformadas e uso de qualquer tipo de calculadora. **Resolva o problema 1 e unicamente um dos problemas 2 ou 3**

1. (10 valores, obrigatório)

   (a) Encontre os vectores próprios da matriz:

   $$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

   (b) A **função de erro** é a solução do problema:

   $$y'' + 2xy' = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = \frac{2}{\pi^{1/2}}$$

   Encontre a série de Maclaurin da função de erro.

2. (10 valores, facultativo) Calcule a transformada inversa de Laplace de:

   $$\frac{20s\,\mathrm{e}^{-5s}}{(s-1)(s^2-4s+13)}$$

3. (10 valores, facultativo) Encontre a solução do problema:

   $$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 13y_n = 10 \qquad y_0 = y_1 = 0$$

2.3 Resolução do teste de 10-12-98

1. (a) A equação característica é:

$$\begin{vmatrix} -(1+\lambda) & 0 & 3 \\ 1 & (1-\lambda) & 1 \\ -4 & 0 & (6-\lambda) \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6) = 0$$

e, portanto, os valores próprios são

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = 3$$

os vectores próprios correspondentes a $\lambda_1 = 1$ são as soluções do sistema

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para $\lambda_2 = 2$ temos:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e para $\lambda_3 = 3$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Os vectores próprios são

$$c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c_3 \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

onde c_1, c_2 e c_3 são três constantes arbitrárias.

(b) O ponto $x = 0$ é um ponto ordinário e, assim, a solução geral da equação diferencial pode ser representada por uma série de Maclaurin:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

As condições iniciais definem os valores das duas primeiras constantes

$$a_0 = y(0) = 0 \qquad a_1 = y'(0) = \frac{2}{\pi^{1/2}}$$

substituindo a série de Maclaurin na equação diferencial obtemos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} + 2na_n] x^n = 0$$

A fórmula de recorrência é:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + 2na_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ou, em função de $b_n = na_n$,

$$(n+1)b_{n+2} + 2b_n = 0$$

Como $b_0 = a_0 = 0$, todos os termos de ordem par serão nulos. Para $n = 2m + 1$ temos:

$$2(m+1)b_{2m+3} + 2b_{2m+1} = 0$$

e definindo $c_m = m!b_{2m+1}$ obtemos uma equação de coeficientes constantes:

$$c_{m+1} + c_m = 0 \Longrightarrow c_m = (-1)^m c_0$$

onde

$$c_0 = b_1 = a_1 = \frac{2}{\pi^{1/2}}$$

O termo geral da sucessão a_{2m+1} é:

$$a_{2m+1} = \frac{b_{2m+1}}{2m+1} = \frac{c_m}{m!\,(2m+1)} = \frac{2(-1)^m}{\pi^{1/2}\,m!\,(2m+1)}$$

e a série de Maclaurin da função de erro é:

$$\frac{2}{\pi^{1/2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{m!\,(2m+1)}$$

Outra forma de obter a série consiste em resolver a equação diferencial por separação de variáveis para obter:

$$y(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

seguidamente substitui-se a série de Mclaurin para a função exponencial e integra-se cada termo na série.

2. Usando expansão em fracções parciais:

$$\frac{20s}{(s-1)(s^2-4s+13)} = \frac{A}{s-1} + \frac{3B}{(s-2)^2+9} + \frac{C(s-2)}{(s-2)^2+9}$$

multiplicando os dois lados por $(s-1)$ e substituindo $s = 1$ obtemos:

$$A = 2$$

para $s = 2$ temos:

$$\frac{40}{9} = 2 + \frac{3B}{9} \qquad \Longrightarrow \qquad B = \frac{22}{3}$$

e para $s = 0$:

$$0 = -2 + \frac{22}{13} - \frac{2C}{13} \qquad \Longrightarrow \qquad C = -2$$

Usando a tabela de transformadas, a transformada inversa é:

$$u(t-5)\Big\{\mathrm{e}^{(t-5)} + \mathrm{e}^{2(t-5)}\Big[\frac{22}{3}\sin(3t-15) - 2\cos(3t-15)\Big]\Big\}$$

3. A transformada $\mathbb{Z}$ da equação é:

$$z^2\bar{y} - 4z\bar{y} + 13\bar{y} = \frac{10z}{z-1}$$

e, portanto, a transformada da sucessão y_n é:

$$\bar{y} = \frac{10z}{(z-1)[(z-2)^2+9]} = \frac{Az}{z-1} + \frac{3Bz}{(z-2)^2+9} + \frac{Cz(z-2)}{(z-2)^2+9}$$

multiplicando os dois lados por $z-1$ e substituindo $z=1$, obtemos o valor da constante $A=10$. Para $z=2$ temos:

$$\frac{10}{9} = 10 + \frac{3B}{9} \qquad \Longrightarrow \qquad B = -\frac{80}{3}$$

Finalmente, dividindo por z e substituindo $z=0$:

$$-\frac{10}{13} = -10 - \frac{80}{13} - \frac{2C}{13} \qquad \Longrightarrow \qquad C = 100$$

Usando a tabela para calcular as transformadas inversas obtemos:

$$y_n = 10 + 10\, r^n \Big[10\ \cos(n\theta) - \frac{8}{3} \sin(n\theta) \Big]$$

onde $r = 13^{1/2}$ e $\theta = \mathrm{arctg}(1,5)$.

2.4 1º Exame, 15-1-99

Duração: 2 horas e meia. Com consulta de tabelas de transformadas e uso de qualquer tipo de calculadora.

1. (3 valores) Resolva a equação diferencial ordinária

$$(x+2)^2 y' = 4y + (x+2)^7$$

   com a condição inicial $y(0) = 8$

2. (4 valores) Calcule a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1 \\ \mathrm{e}^{-2t}, & 1 \le t \le 2 \\ 2, & 2 \le t \end{cases}$$

3. (4 valores) Encontre a solução geral do sistema de equações diferenciais $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, onde $\mathbf{A}$ é a seguinte matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. (4 valores) Sabendo que $y_0 = 2$, encontre a solução da seguinte equação de diferenças:

$$(1+n)y_{n+1} + (2n+8)y_n = 0$$

5. (5 valores) Resolva a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

   para as seguintes condições fronteira:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,y) = u(1-y) \qquad \frac{\partial T}{\partial y}(x,0) = 0 \qquad T(2,y) = 0 \qquad T(x,2) = 0$$

2.5 Resolução do exame do 15-1-99

1. A equação pode ser escrita na forma:

$$y' - \frac{4}{(x+2)^2} y = (x+2)^5$$

a qual é uma equação linear de primeira ordem. O factor integrante é igual a

$$\mu = \exp\left(-4 \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2} \right) = \mathrm{e}^{4/(x+2)}$$

multiplicando os dois lados da equação por μ e agrupando os termos no lado esquerdo, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[y\,\mathrm{e}^{4/(x+2)}] = (x+2)^5\,\mathrm{e}^{4/(x+2)}$$

$$\Longrightarrow \quad y\,\mathrm{e}^{4/(x+2)} = \int (x+2)^5\,\mathrm{e}^{4/(x+2)}\,\mathrm{d}x + C$$

A primitiva não pode ser calculada analiticamente e, assim, convém escrever explicitamente os limites de integração, desde um valor arbitrário x_0 até a variável x. Para facilitar o cálculo da constante C, escolhemos $x_0 = 0$ que conduz à solução

$$y = \mathrm{e}^{-4/(x+2)} \left(\int_0^x (t+2)^5\,\mathrm{e}^{4/(t+2)}\,\mathrm{d}t + C \right)$$

O valor da constante C obtém-se substituindo a condição inicial:

$$y(0) = C\,\mathrm{e}^{-2} = 8 \quad \Longrightarrow \quad C = 8\,\mathrm{e}^2$$

2. Usando a função degrau unitário, a função $f(t)$ escreve-se

$$f(t) = t[1 - u(t-1)] + \mathrm{e}^{-2t}[u(t-1) - u(t-2)] + 2u(t-2)$$

Para poder usar a propriedade de deslocamento no domínio do tempo, é preciso re-escrever a função na forma

$$f(t) = t - [(t-1)+1]u(t-1) + \mathrm{e}^{-2}\,\mathrm{e}^{-2(t-1)}u(t-1) - \mathrm{e}^{-4}\,\mathrm{e}^{-2(t-2)}u(t-2) + 2u(t-2)$$

usando a tabela de transfomadas de Laplace, obtemos a transformada de f:

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + \mathrm{e}^{-s}\left(\frac{\mathrm{e}^{-2}}{s+2} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \right) + \mathrm{e}^{-2s}\left(\frac{2}{s} - \frac{\mathrm{e}^{-4}}{s+2} \right)$$

3. A equação característica é:

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0 & -1 \\ 0 & (2-\lambda) & 0 \\ 1 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(\lambda-1)^2 + 1] = 0$$

e, portanto, os valores próprios são

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 1 + \mathrm{i} \qquad \lambda_3 = 1 - \mathrm{i}$$

um vector próprio ($\mathbf{v}_1$) correspondente a $\lambda_1 = 2$ obtém-se a partir da solução do sistema

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e a solução particular correspondente a $\mathbf{v}_1$ é

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Outras duas soluções linearmente independentes podem ser obtidas a partir de λ_2 ou λ_3. Para $\lambda_3 = 1 - \mathrm{i}$ obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathrm{i} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & (1+\mathrm{i}) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \mathrm{i} & 0 \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}$$

A partir de $\mathbf{w}$ pode obter-se uma solução particular complexa:

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{w} = \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{t}\begin{bmatrix} \cos t - \mathrm{i}\sin t \\ 0 \\ \sin t + \mathrm{i}\cos t \end{bmatrix}$$

As partes real e imaginária desta solução são também soluções, e junto com a solução obtida a partir de λ_1, constituem um conjunto fundamental de soluções do sistema:

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{e}^{t}\begin{bmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad \mathrm{e}^{t}\begin{bmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{bmatrix}$$

A solução geral do sistema é qualquer combinação linear do conjunto fundamental de soluções:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{e}^{t}\cos t & -\mathrm{e}^{t}\sin t \\ \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t}\sin t & \mathrm{e}^{t}\cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

4. Os dois factores lineares que aparecem na equação, podem ser escritos na forma f_{n+1}/f_n usando factoriais

$$n+1 = \frac{(n+1)!}{n!} \qquad n+4 = \frac{(n+4)!}{(n+3)!}$$

Substituindo na equação de diferenças e re-agrupando termos obtemos

$$\frac{(n+1)!}{(n+4)!}y_{n+1} + 2\frac{n!}{(n+3)!}y_n = 0$$

usando a substituição

$$a_n = \frac{n!}{(n+3)!}y_n$$

obtemos uma equação de coeficientes constantes para a sucessão a_n:

$$a_{n+1} + 2a_n = 0$$

A equação característica tem uma única raiz $\lambda = -2$ e, assim, a solução geral é

$$a_n = a_0(-2)^n \quad \Longrightarrow \quad y_n = a_0\frac{(n+3)!(-2)^n}{n!}$$

Para $n = 0$ obtém-se $(y_0 = 6a_0 = 2)$ e, portanto, $a_0 = 1/3$

$$y_n = \frac{(n+3)!(-2)^n}{3\,n!}$$

5. A equação pode ser resolvida usando a transformada de Fourier de $T(x, y)$. em ordem a y

$$t_n = \langle T(x, y), \phi_n(y) \rangle = \int_0^2 T(x, y)\phi_n(y)\,\mathrm{d}y$$

Atendendo às condições fronteira do problema, arbitramos as seguintes condições para as funções próprias

$$\phi_n'(0) = 0 \qquad \phi_n(2) = 0$$

que conduzem às seguintes funções próprias e valores próprios

$$\phi_n(y) = \cos(\lambda_n y) \qquad \lambda_n = (2n+1)\frac{\pi}{4}$$

as transformadas das derivadas parciais de T são:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_n = \frac{\mathrm{d}^2 t_n}{\mathrm{d}x^2}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_n &= \int_0^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\cos(\lambda_n y)\,\mathrm{d}y = \frac{\partial T}{\partial y}\cos(\lambda_n y)\bigg|_0^2 + \lambda_n \int_0^2 \frac{\partial T}{\partial y}\sin(\lambda_n y)\,\mathrm{d}y \\ &= \lambda_n T \sin(\lambda_n y)\bigg|_0^2 - \lambda_n^2 \int_0^2 T\cos(\lambda_n y)\,\mathrm{d}y = -\lambda_n^2 t_n\end{aligned}$$

A transformada de Fourier da equação de Laplace é

$$\frac{\mathrm{d}^2 t_n}{\mathrm{d}x^2} - \lambda_n^2 t_n = 0$$

esta é uma equação diferencial ordinária, linear, de coeficientes constantes. As duas raizes do polinómio característico são λ_n e $-\lambda_n$, e a solução geral é

$$t_n = A_n\,\mathrm{e}^{\lambda_n x} + B_n\,\mathrm{e}^{-\lambda_n x}$$

As condições fronteira para t_n obtêm-se a partir das transformadas de Fourier das condições fronteira do problema:

$$t_n(2) = \langle T(2, y), \phi_n(y) \rangle = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}t_n(0)}{\mathrm{d}x} = \langle u(1-y), \phi_n(y) \rangle = \int_0^1 \cos(\lambda_n y)\,\mathrm{d}y = \frac{\sin\lambda_n}{\lambda_n}$$

substituindo estas condições na solução geral $t_n(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}A_n - B_n &= \frac{\sin\lambda_n}{\lambda_n^2} \\ A_n\,\mathrm{e}^{2\lambda_n} + B_n\,\mathrm{e}^{-2\lambda_n} &= 0\end{aligned}$$

Resolvendo este sistema, obtemos as constantes A_n, B_n e a solução particular

$$t_n = \frac{\sin\lambda_n\,\mathrm{e}^{-2\lambda_n}}{2\lambda_n^2\cosh(2\lambda_n)}\,\mathrm{e}^{\lambda_n x} - \frac{\sin\lambda_n\,\mathrm{e}^{2\lambda_n}}{2\lambda_n^2\cosh(2\lambda_n)}\,\mathrm{e}^{-\lambda_n x}$$

A função $T(x, y)$ é dada pela série de Fourier

$$T(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\lambda_n}{\lambda_n^2\cosh(2\lambda_n)}\sinh[\lambda_n(x-2)]\cos(\lambda_n y)$$

2.6 2º Exame, 2-2-99

Duração: 2 horas e meia. Com consulta de tabelas de transformadas e uso de qualquer tipo de calculadora.

1. (4 valores) Encontre a solução geral da equação diferencial linear

$$(x^2 - 3x + 2)y'' + xy' - y = 3x$$

sabendo que as seguintes funções são soluções particulares da equação homogénea correspondente:

$$y_1 = x \qquad y_2 = \frac{1}{x-2}$$

2. (4 valores) Encontre a solução do seguinte problema de valores iniciais, para qualquer função $f(t)$ parcelarmente contínua e de ordem exponencial

$$y'' + y' - 2y = f(t) \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

3. (4 valores) Encontre a solução do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 3x_2 + 2t^2 + t & \qquad x_1(0) &= 5 \\ x_2' &= x_1 + 4x_2 + t^2 + t - 1 & \qquad x_2(0) &= 1 \end{aligned}$$

4. (4 valores) Um doente toma diariamente 100 mg de uma certa droga para controlar a sua asma. A droga é eliminada do corpo do doente de forma que cada dia a quantidade de droga no corpo diminui 25 %. Seja y_n a quantidade de droga no corpo do doente imediatamente depois de tomar a dose número $n+1$, n dias depois de começar o tratamento (assim, imediatamente a seguir à primeira dose $y_0 = 100$). Calcule a quantidade limite de droga no corpo do doente (y_∞). Qual devia ser a dose diária da droga para se obter um limite de 800 mg da droga no corpo do doente?

5. (4 valores) Resolva a equação de derivadas parciais:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3xy = \mathrm{e}^{-2x}$$

no domínio $0 \le x \le 1$ e y qualquer número real, com as seguintes condições fronteira:

$$v(0, y) = 4\sin y \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(1, y) = 6(\sin y - y)$$