EXAMES DE ELECTROMAGNETISMO

Jaime E. Villate
Faculdade de Engenharia
Universidade do Porto

5 de Fevereiro de 1999

Resumo

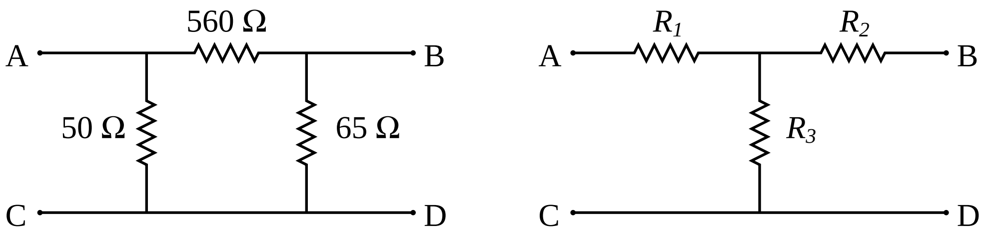
Este documento contém os exames da disciplina de física, dos cursos de engenharia química e engenharia informática e de computação, realizados durante os últimos dois anos. A disciplina de física é uma disciplina do primeiro semestre do segundo ano, destinada ao ensino do electromagnetismo.

1 Ano lectivo 2000-2001

1.1 Exame do dia 19-1-2001

Docente: Jaime Villate
Duração: 2 horas

1. (4 valores) O circuito do lado esquerdo, com quatro terminais, vai ser substituído pelo circuito equivalente do lado direito. Calcule os valores que deverão ter R_1, R_2 e R_3.



2. (4 valores) Calcule o fluxo (para fora) do campo vectorial

$$\mathbf{F} = 4xy\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$$

através da superfície do cubo delimitado pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 1$. Diga (justificando as suas respostas) se este campo poderia ser um campo electrostático ou um campo de indução magnética.

3. (3 valores) O potencial eléctrico a uma certa distância de uma carga pontual é 600 V (arbitrando potencial nulo no infinito) e o campo eléctrico é 200 N/C. Calcule a distância e o valor da carga.

4. (4 valores) Uma esfera de raio a, tem carga eléctrica distribuída de forma que a carga volúmica é $\rho = Ar$, onde A é uma constante e r a distância ao centro da esfera. Calcule o potencial electrostático produzido pela esfera.

5. (5 valores) Um condutor cilíndrico oco, com raio interno a e raio externo b transporta uma corrente I, paralela ao eixo do cilindro, distribuída uniformemente na secção transversal do condutor. Usando a lei de Ampère, calcule o campo de indução magnética em função da distância até o eixo do cilindro (R).

1.2 Resolução do exame do dia 19-1-2001

1. Este problema é bastante semelhante ao problema 6.8 do livro. Neste caso os pontos C e D no circuito são um único ponto. Assim, para que os dois circuitos sejam equivalentes, basta garantir que a resistência equivalente entre os pontos A e B, A e C, e B e C seja a mesma nos dois circuitos. No circuito do lado esquerdo temos:

$$\begin{aligned} R_{AB} &= \left(\frac{1}{560} + \frac{1}{50+65}\right)^{-1} = 95,4 \\ R_{AC} &= \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{560+65}\right)^{-1} = 46,2 \\ R_{BC} &= \left(\frac{1}{65} + \frac{1}{50+560}\right)^{-1} = 58,7 \end{aligned}$$

E no circuito do lado direito:

$$\begin{aligned} R_{AB} &= R_1 + R_2 \\ R_{AC} &= R_1 + R_3 \\ R_{BC} &= R_2 + R_3 \end{aligned}$$

igualando os resultados obtidos nos dois circuitos, obtemos um sistema linear de 3 equações

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 95,4 \\ 1 & 0 & 1 & 46,2 \\ 0 & 1 & 1 & 58,7 \end{array}\right]$$

e a solução deste sistema dá os valores das 3 resistências: $R_1 = 41,45\Omega$, $R_2 = 53,95\Omega$, $R_3 = 4,75\Omega$.

2. O cubo está formado por seis planos e, portanto, para calcular o fluxo através do cubo será necessário calcular os fluxos nas seis faces, como foi feito na alínea c do problema 3.13. Mas no problema 4.9 vimos que o problema 3.13 resolve-se muito mais facilmente usando a equação de Poisson, que é uma consequência da lei de Gauss e o teorema da divergência. Assim, usaremos o teorema da divergência para calcular o fluxo (primeira equação do capítulo 4 no formulário):

$$\oiint_{\mathrm{S}} \mathbf{F} \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_{\mathrm{R}} \nabla \cdot \mathbf{F} \,\mathrm{d}V$$

a divergência do campo **F** é

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial(4xy)}{\partial x} + \frac{\partial(-y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(yz)}{\partial z} = 3y$$

e o fluxo através do cubo é

$$\Psi = \iiint_{\mathrm{R}} \nabla \cdot \mathbf{F} \,\mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 3y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = 1,5$$

As condições que deverão verificar os campos **E** e **B** para serem campos electrostático e de indução magnética, são (ver formulário):

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

a divergência de **F** já vimos que não é nula e, portanto, **F** não pode ser um campo de indução magnética. A coordenada x do rotacional de **F** é

$$\frac{\partial yz}{\partial y} - \frac{\partial(-y^2)}{\partial z} = z$$

e por não ser nula, **F** não pode ser um campo electrostático.

3. O módulo do campo eléctrico de uma carga pontual q na origem é

$$E = \frac{kq}{r^2}$$

e o potencial é

$$V = \frac{kq}{r}$$

dividindo os dois valores obtemos

$$\frac{V}{E} = r$$

substituindo os valores do problema, obtemos que a distância é $r = 3$ m. Para calcular a carga, substituímos na equação do potencial

$$600 = \frac{9 \cdot 10^9 q}{3}$$

e assim a carga é de 200 nC.

4. Este problema resolve-se usando o método do exemplo 3.5, onde o campo eléctrico é o calculado na alínea b do problema 2.13. Para calcular o campo eléctrico, observamos que qualquer esfera de raio r é uma superfície gaussiana, e consequentemente o fluxo eléctrico nessa esfera é

$$\Psi = 4\pi r^2 E$$

comparando com a lei de Gauss

$$\Psi = 4\pi k q_{\text{int}}$$

obtemos o valor do campo em função da carga interna

$$E = \frac{k q_{\text{int}}}{r^2}$$

A carga interna é

$$q_{\text{int}} = \iiint \rho \, \mathrm{d}V = 4\pi A \int_0^r r^3 \, \mathrm{d}r$$

se $r \leq a$ a carga interna será $\pi A r^4$, e se $r \geq a$ a carga interna é $\pi A a^4$. Assim, o módulo do campo no interior da esfera será $\pi k A r^2$ e no exterior da esfera $\pi k A a^4 / r^2$; nos dois casos o campo tem direcção radial. A diferença de potencial calcula-se com a equação

$$V_{\text{A}} - V_{\text{B}} = \int_{\text{A}}^{\text{B}} \mathbf{E} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\text{A}}^{\text{B}} E \, \mathrm{d}r$$

se escolhermos o ponto B no infinito, onde o potencial é nulo, e o ponto A a uma distância r da origem, obtemos

$$V(r) = \int_r^\infty E \, \mathrm{d}r$$

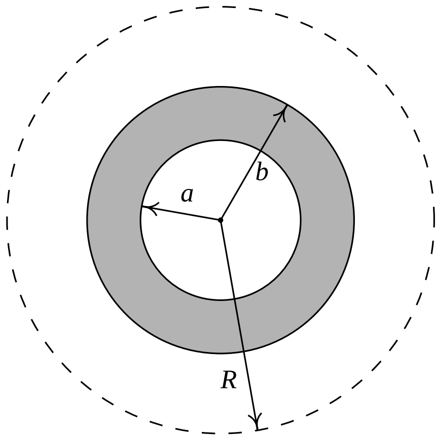
se $r \geq a$, integramos o campo no exterior da esfera

$$V = \pi k A a^4 \int_r^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{\pi k A a^4}{r}$$

enquanto que se $r \leq a$, o integral terá que ser calculado em duas partes

$$V = \pi k A \int_r^a r^2 \, \mathrm{d}r + \pi k A a^4 \int_a^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{\pi k A}{3}(r^3 + 2a^3)$$

5. Este problema resolve-se em forma análoga ao exemplo 9.3. A figura mostra a secção transversal do condutor. O círculo tracejado, que pode ter qualquer valor do raio R, é uma linha de indução magnética



A área da secção transversal do condutor é $\pi(b^2 - a^2)$, e como a corrente está distribuída uniformemente, a densidade de corrente será constante e igual a

$$J = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}$$

o integral de linha do campo, sobre o círculo tracejado na figura, é

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = B \int \mathrm{d}s = 2\pi R B$$

Usando a lei de Ampère,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 4\pi k_\mathrm{m} I_\mathrm{C}$$

concluímos que:

$$B = \frac{2k_\mathrm{m} I_\mathrm{C}}{R}$$

Se o raio do círculo for menor que a, a corrente interna I_C é nula e o campo será nulo

$$B = 0 \qquad (R < a)$$

se $R > b$, a corrente interna será igual à corrente total I, e o campo será

$$\mathbf{B} = \frac{2k_\mathrm{m} I}{R} \mathbf{e}_\theta$$

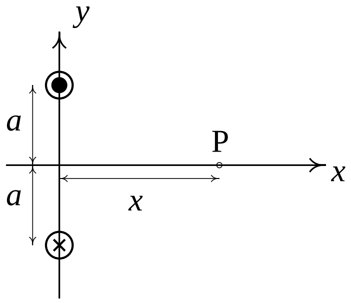
onde o versor transversal $\mathbf{e}_\theta$ define-se num sistema de coordenadas onde o versor $\mathbf{k}$ aponta na direcção e sentido da corrente. Finalmente, dentro do condutor ($a \le R \le b$) a corrente interna calcula-se multiplicando a área da parte da secção do condutor dentro do círculo, $\pi(R^2 - a^2)$, vezes a densidade de corrente. O resultado obtido é:

$$\mathbf{B} = \frac{2k_\mathrm{m} I}{R} \left(\frac{R^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) \mathbf{e}_\theta$$

1.3 Exame do dia 2-2-2001

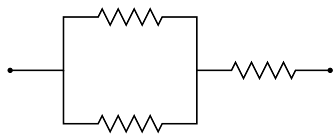
Docente: Jaime Villate
Duração: 2 horas.

1. (4 valores) Na figura está representado esquematicamente um corte transversal de dois cabos longos e paralelos, perpendiculares ao plano xy, cada um com uma corrente I, em sentidos opostos. (*a*) Represente os vectores de indução magnética de cada cabo e o campo resultante no ponto P. (*b*) Deduza a expressão para o módulo do campo de indução magnética em qualquer ponto sobre o eixo x, em termos da coordenada x do ponto.



2. (4 valores) Três condensadores de 1,5 pF, 2,2 pF e 3,0 pF estão ligados (*i*) em série, (*ii*) em paralelo e aplica-se-lhes uma diferença de potencial de 6 V. Calcule, para cada caso, (*a*) a capacidade do sistema, (*b*) a carga sobre cada condensador e (*c*) a diferença de potencial em cada condensador.

3. (4 valores) Cada uma das resistências da figura tem uma resistência de 2,8 kΩ e pode dissipar um máximo de 0,5 W, sem se danificar. Calcule a potência máxima que pode dissipar o circuito, e a corrente em cada resistência.

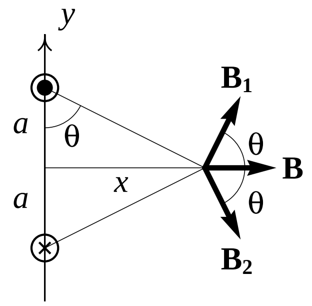


4. (2 valores) Um sistema de três cargas pontuais está em equilíbrio (a força electrostática sobre cada carga é zero). Sabendo que duas das cargas são $3q$ e $2q$, separadas por uma distância d, calcule o valor e a posição da terceira carga.

5. (6 valores) Um corpo esférico de raio R tem uma carga Q distribuída uniformemente em todo o seu volume. (*a*) Usando a lei de Gauss, calcule o campo eléctrico dentro e fora do corpo. (*b*) Integrando o campo eléctrico, calcule o potencial no interior do corpo. (*c*) Calcule a energia volúmica electrostática em qualquer ponto dentro do corpo. (*d*) integrando a energia volúmica, calcule a energia electrostática total do corpo.

1.4 Resolução do exame do dia 2-2-2001

1. As linhas de indução magnética de cada cabo são ciculares, com centro no cabo e no sentido da mão direita segundo a corrente; assim, os campos de indução produzidos pelos dois cabos são como se representam na figura:



Como a corrente nos dois cabos tem a mesma intensidade, e os dois cabos estão à mesma distância de P, os módulos dos dois campos é o mesmo; as componentes segundo y anulam-se e as componentes segundo x somam-se para produzir um campo resultante na direcção do versor $\mathbf{i}$

$$\mathbf{B} = \frac{2k_m I}{(x^2+a^2)^{1/2}} \cos\theta\, \mathbf{i} + \frac{2k_m I}{(x^2+a^2)^{1/2}} \cos\theta\, \mathbf{i}$$

$$B = \frac{4k_m I a}{x^2+a^2}$$

2. (a) Em série a capacidade equivalente será (em pF)

$$C_s = \left(\frac{1}{1,5} + \frac{1}{2,2} + \frac{1}{3}\right)^{-1} = 0,6875$$

e em paralelo,

$$C_p = 1,5 + 2,2 + 3 = 6,7$$

(b) Nos condensadores em série a carga é a mesma em todos eles e igual à carga que armazenaria o condensador equivalente

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = C_{\text{eq}}\Delta V = (0,6875\text{pF})(6\text{V}) = 4,125\text{pC}$$

quando ligados em paralelo, a diferença de potencial em cada um dos condensadores será 6 V, e as cargas obtidas são:

$$\begin{aligned} Q_1 &= (1,5\text{pF})(6\text{V}) = 9\text{pC} \\ Q_2 &= (2,2\text{pF})(6\text{V}) = 13,2\text{pC} \\ Q_3 &= (3\text{pF})(6\text{V}) = 18\text{pC} \end{aligned}$$

(c) Em paralelo, já dissemos na alínea anterior que a diferença de potencial é de 6 V em cada condensador. Quando ligados em série, a partir da carga obtida na alínea anterior calculamos as diferenças de potencial

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= \frac{4,125\text{pC}}{1,5\text{pF}} = 2,75\text{V} \\ \Delta V_2 &= \frac{4,125\text{pC}}{2,2\text{pF}} = 1,875\text{V} \\ \Delta V_3 &= \frac{4,125\text{pC}}{3\text{pF}} = 1,375\text{V} \end{aligned}$$

pode-se conferir que a soma das três da 6 V.

3. A potência máxima que cada resistência pode dissipar implica uma corrente máxima:

$$I = \left(\frac{P}{R}\right)^{1/2} = 13,36\text{mA}$$

A corrente em nenhuma das resistências poderá ultrapassar esse valor. No entanto, a corrente em cada uma das resistências idênticas ligadas em paralelo será sempre metade da corrente na terceira resistência. Consequentemente, a situação de máxima potência dissipada atinge-se quando a corrente nas resistências em paralelo for 6,68 mA, enquanto que a corrente na terceira resistência terá o seu valor máximo. Uma diminuição da corrente a metade do seu valor máximo implica a diminuição da potência a 1/4 do seu valor máximo; a potência total dissipada é

$$P_t = (0,125 + 0,125 + 0,5)\text{W} = 0,75\text{W}$$

4. A única possibilidade para que a resultante de dois vectores seja nula, é que os vectores estejam sobre a mesma linha de acção e com sentidos opostos. Como o sinal das duas cargas é o mesmo, a terceira carga terá que estar necessariamente entre as outras duas e sobre o segmento que as une. Se d_1 e d_2 forem as distâncias de cada uma das cargas até a terceira, a igualdade dos módulos das forças implica

$$\frac{3kqQ}{d_1^2} = \frac{2kqQ}{d_2^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d_1}{d_2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}$$

como as 3 cargas estão sobre a mesma recta, $d_1 + d_2 = d$ e substituindo obtemos

$$d_1 = (3 - \sqrt{6})d \qquad d_2 = (\sqrt{6} - 2)d$$

para calcular a terceira carga (Q) primeiro observamos que deverá ter sinal oposto a q para que as forças sobre $2q$ se anulem; igualando os módulos das forças sobre $2q$, temos:

$$\frac{2kq|Q|}{d_2^2} = \frac{6kq^2}{d^2} \quad \Longrightarrow \quad Q = -6q(5 - 2\sqrt{6})$$

5. (a) Devido à simetria esférica do problema, o campo eléctrico deverá ser radial, e a lei de Gauss conduz a um módulo do campo igual a:

$$E = \frac{kQ_i}{r^2}$$

onde Q_i é a carga total dentro de uma esfera gaussiana de raio r. Se $r \geq R$, $Q_i = Q$; no caso $r \leq R$, a distribuição uniforme implica uma carga volúmica

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

e uma carga interna

$$Q_i = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = Q\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

assim, o módulo do campo eléctrico será

$$E = \begin{cases} \dfrac{kQ}{R^3} r & r \leq R \\[2ex] \dfrac{kQ}{r^2} & r \geq R \end{cases}$$

(b) Se $r \leq R$, o potencial eléctrico será

$$V = \int_r^{\infty} E \, \mathrm{d}r = \int_r^R \frac{kQ}{R^3} r \, \mathrm{d}r + \int_R^{\infty} \frac{kQ}{r^2} \, \mathrm{d}r = \frac{kQ}{2R}\left[3 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

(c) A energia volúmica electrostática num ponto é igual a metade do produto entre a carga volúmica e o potencial nesse ponto. Usando os valores de ρ (fora da esfera é nula) e de V já calculados dentro da esfera,

$$u = \frac{3kQ^2}{16\pi R^4}\left[3 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

(d) A energia electrostática total obtem-se integrando u dentro da esfera. Como existe simetria esférica, o integral de volume na esfera será

$$U = 4\pi \int_0^R u r^2 \, \mathrm{d}r = \frac{3kQ^2}{5R}$$

2 Ano lectivo 1998-99

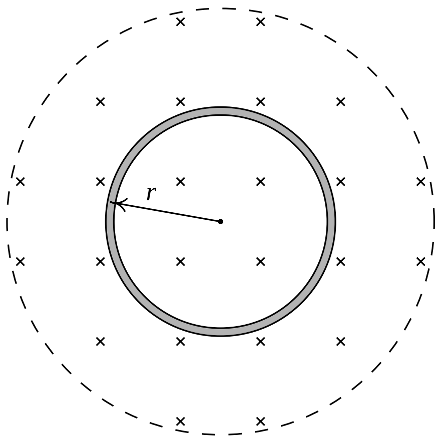
2.1 Exame do dia 29-1-99

Docentes: Jaime Villate e Inês Freitas
Duração: 2 horas
Com consulta de formulário. Pode responder a lápis e em qualquer ordem.

1. (3 valores) Represente as linhas de campo dos campos $\mathbf{F} = \mathbf{r}$ e $\mathbf{G} = \mathbf{k} \times \mathbf{r}$, onde $\mathbf{r}$ é o vector posição. Demonstre que em qualquer ponto a divergência de $\mathbf{F}$ é igual a 3 e o rotacional de $\mathbf{G}$ é igual a $2\,\mathbf{k}$.

2. (4 valores) Dois condensadores de $10\ \mu\text{F}$ e $20\ \mu\text{F}$ são ligados em série a uma fonte de 1200 V. Calcule a carga em cada condensador. A fonte é logo desligada, ligando entre si os terminais dos condensadores que estavam em contacto com a fonte. Calcule a diferença de potencial e carga final em cada condensador.

3. (5 valores) No interior do círculo a tracejado na figura, existe um campo de indução magnética apontando para dentro do papel e com módulo igual a $0{,}6\,\mathrm{e}^{-t/15}$ (unidades SI, $t = \text{tempo}$). Calcule o módulo e direcção do campo eléctrico induzido dentro do anel condutor de raio $r = 9\,\text{cm}$.

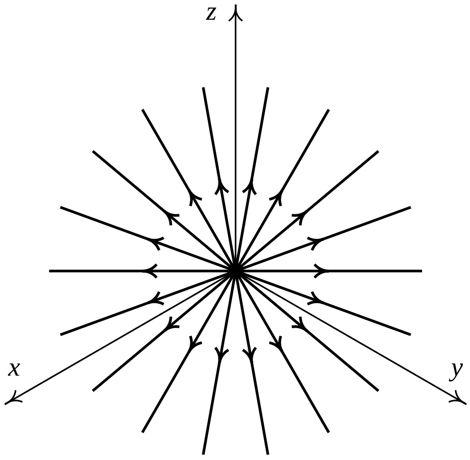


4. (4 valores) Quando três resistências idênticas são ligadas em paralelo a uma fonte de tensão, a potência total dissipada é $7,8$ W. Qual será a potência dissipada quando as três resistências forem ligadas em série à mesma fonte?

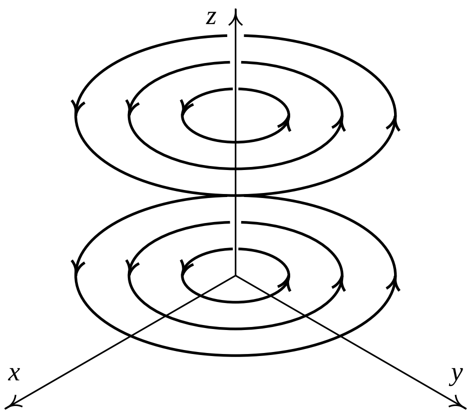
5. (4 valores) Um fio cilíndrico de cobre, de raio a, conduz uma corrente I. A corrente está distribuída de forma não-uniforme, com $J = Ar^3$, onde r é a distância até o eixo do fio e A uma constante. Calcule o campo de indução magnética $\mathbf{B}$ no interior e no exterior do fio, usando a lei de Ampère.

2.2 Resolução do exame do dia 29-1-99

1. As linhas de campo de **F** apontam na direcção radial e, portanto, o desenho das linhas de campo é:



Em qualquer ponto, o campo $\mathbf{G}$ é perpendicular ao versor $\mathbf{k}$ e ao versor radial; assim, $\mathbf{G}$ tem a mesma direcção e sentido que o versor $\mathbf{e}_\theta$ e as linhas de campo são circunferências paralelas ao plano xy, com centro no eixo dos z:



A divergência de **F** é:

$$\nabla \cdot (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

Em função das coordenadas cartesianas, o campo $\mathbf{G}$ é

$$\mathbf{G} = \mathbf{k} \times (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) = x\,\mathbf{j} - y\,\mathbf{i}$$

e o seu rotacional é igual a

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial x}{\partial z}\,\mathbf{i} - \frac{\partial y}{\partial z}\,\mathbf{j} + \frac{\partial x}{\partial x}\,\mathbf{k} + \frac{\partial y}{\partial y}\,\mathbf{k} = 2\,\mathbf{k}$$

2. A carga é igual nos dois condensadores, por estarem em série, e é igual à carga no condensador equivalente

$$Q = C_{\text{eq}}\Delta V$$

$$C_{\text{eq}} = \frac{10 \cdot 20}{10 + 20}\ \mu\text{F} = \frac{20}{3}\ \mu\text{F} \quad \Longrightarrow \quad Q = 8\ \text{mC}$$

Após a fonte ter sido desligada e os condensadores ligados entre si, a diferença de potencial nos dois condensadores será igual e, portanto, a carga em cada um será directamente proporcional às suas capacidades:

$$Q_2 = 2Q_1$$

onde Q_1 e Q_2 são as cargas nos condensadores de $10\ \mu\text{F}$ e $20\ \mu\text{F}$, respectivamente. Por conservação da carga, sabemos também que

$$Q_1 + Q_2 = 3Q_1 = 8\ \text{mC}$$

assim, as cargas finais são $Q_1 = 8/3\ \text{mC}$ e $Q_2 = 16/3\ \text{mC}$.

3. Como o campo de indução magnética é uniforme e perpendicular ao plano do anel condutor, o fluxo através deste será:

$$\Phi = \int\!\!\int B\,\mathrm{d}A = BA = 0{,}6\pi r^2\,\mathrm{e}^{-t/15}$$

e a fem induzida é igual a

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi r^2}{25}\,\mathrm{e}^{-t/15}$$

esta fem induzida é igual ao integral de linha do campo eléctrico induzido, ao longo do anel. Como o campo induzido tem módulo constante e segue a direcção tangente ao anel, o seu integral de linha ao longo do anel será

$$\mathcal{E} = 2\pi r E_{\text{i}}$$

comparando as duas equações anteriores, obtemos o módulo do campo eléctrico induzido

$$E_{\text{i}} = \frac{r}{50}\,\mathrm{e}^{-t/15} = 0,0018\,\mathrm{e}^{-t/15}$$

A a sua direcção, como já foi dito, é tangente ao anel. Para encontrar o sentido do campo eléctrico induzido, observamos que como o módulo de B diminui, a derivada do campo $\mathbf{B}$ aponta para fora da folha de papel. Segundo a lei de Lenz, o campo magnético induzido apontará para dentro da folha de papel, o que implica uma corrente e um campo eléctrico induzido no sentido horário.

4. A resistência equivalente a três resistências iguais, ligadas em paralelo, é igual a um terço de cada uma das resistências. E a resistência equivalente quando as três resistências são ligadas em série é três vezes maior que a resistência de cada uma delas. Assim, a resistência equivalente é 9 vezes maior no caso das resistências estarem ligadas em série. Como a potência dissipada numa resistência é igual a

$$P = \frac{\Delta V^2}{R}$$

e a diferença de potencial é constante (a fonte de tensão é a mesma), a potência dissipada é inversamente proporcional à resistência e, portanto, a potência dissipada nas resistências ligadas em série será 9 vezes menor que o valor inicial de $7,8\ \text{W}$

$$P = \frac{7,8}{9}\ \text{W} = 0{,}8667\ \text{W}$$

5. Se escolhermos o eixo dos z sobre o eixo do cilindro (no sentido da corrente), e como a densidade de corrente depende unicamente da distância ao eixo, existe simetria cilíndrica e as linhas de indução magnética serão circunferências paralelas ao cilindro e com centro no eixo dos z (ver desenho das linhas do campo **G** no problema 1). O integral de linha do campo **B**, ao longo de uma linha de indução de raio r é

$$\oint_{\mathrm{C}} \mathbf{B} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = B \int \, \mathrm{d}s = 2\pi r B$$

Usando a lei de Ampère, obtemos

$$\oint_{\mathrm{C}} \mathbf{B} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = 4\pi k_{\mathrm{m}} I_{\mathrm{C}} \ .$$

Comparando as duas equações concluímos que:

$$B = \frac{2k_{\mathrm{m}} I_{\mathrm{C}}}{r} \ .$$

Se r for menor que o raio do cilindro, a corrente através de C será:

$$I_{\mathrm{C}} = \int\int J \, \mathrm{d}A = A \int_0^{2\pi} \int_0^{r} r^4 \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \frac{2}{5}\pi A r^5$$

Se r for maior que o raio do cilindro, o integral de J é no intervalo $0 \leq r \leq a$ e a corrente é igual a

$$I_{\mathrm{C}} = \frac{2}{5}\pi A a^5$$

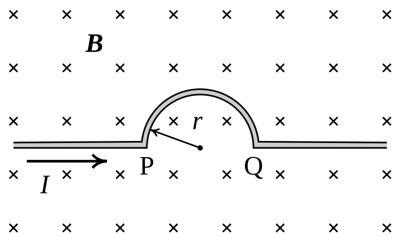
Assim, o campo será

$$B = \begin{cases} \dfrac{4k_{\mathrm{m}}\pi A a^5}{5r} & r \geq a \\[2ex] \dfrac{4k_{\mathrm{m}}\pi A r^4}{5} & r < a \end{cases}$$

2.3 Exame do dia 8-1-99

Docentes: Jaime Villate e Inês Freitas
Duração: 2 horas
Pode responder a lápis e em qualquer ordem. Com consulta do formulário.

1. (4 valores) O fio da figura transporta uma corrente $I = 5$ A e encontra-se dentro de um campo de indução magnética $B = 125$ G, uniforme e para dentro da folha de papel. Calcule a força magnética total sobre o arco PQ de raio $r = 3$ cm.



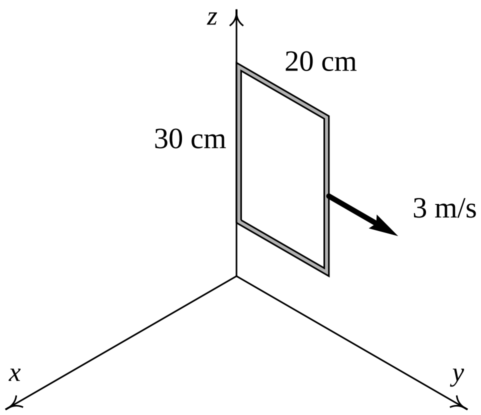
2. (4 valores) Uma esfera metálica isolada, de 1 m de raio tem uma carga inicial de 5×10^{-9} C. A esfera é ligada a outra esfera condutora isolada, de 30 cm de raio, inicialmente descarregada, por meio de um fio condutor. Calcule a carga em cada esfera, no estado de equilíbrio, desprezando a carga armazenada no fio e admitindo que as esferas estão bastante afastadas entre si.

3. (3 valores) Explique porque os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ de uma onda electromagnética plana, que se propaga no vazio na direcção do eixo dos y, não podem depender de x ou de z.

4. (5 valores) Uma espira condutora rectangular, paralela ao plano yz, desloca-se com velocidade uniforme $\mathbf{v} = 3\,\mathbf{j}$ $(\mathrm{m/s})$ dentro de uma região onde existe um campo de indução magnética (unidades SI):

$$B_x = (6 - y) \qquad B_y = B_z = 0$$

   Calcule a *fem* induzida na espira, em função do tempo t, a partir do instante $t = 0$ em que a espira se encontra na posição da figura.



5. (4 valores) Calcule o campo eléctrico devido à distribuição de carga volúmica (unidades SI):

$$\rho(r,\theta,z) = \begin{cases} ar\ , & r \le b,\ -\infty < z < \infty \\ 0\ , & r > b,\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$

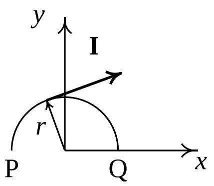
   onde (r,θ,z) são as coordenadas cilíndricas, e a e b são constantes.

2.4 Resolução do exame do dia 8-1-99

1. A força total é dada pelo integral

$$\mathbf{F} = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \mathbf{I} \times \mathbf{B}\, \mathrm{d}s$$

Num ponto qualquer do arco, a corrente é tangente ao arco e podemos definir os eixos da seguinte forma:



assim, a corrente é no sentido oposto do versor $\mathbf{e}_\theta$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= -I\mathbf{e}_\theta \\
\mathbf{B} &= 6 - B\,\mathbf{k} \\
\mathbf{I} \times \mathbf{B} &= IB\mathbf{e}_r \\
ds &= -rd\theta \\
\mathbf{F} &= -rIB \int_\pi^0 \mathbf{e}_r d\theta
\end{aligned}$$

O versor radial depende do ângulo θ:

$$\mathbf{e}_r = \cos\,\theta\,\mathbf{i} + \sin\,\theta\,\mathbf{j}$$

$$\Longrightarrow\ \mathbf{F} = rIB\Big(-\sin\,\theta\,\mathbf{i} + \cos\,\theta\,\mathbf{j}\Big)_\pi^0 = 2rIB\,\mathbf{j} = 0,0375\,\mathbf{j}\ (\mathrm{T})$$

2. A carga inicial Q_0 redistribui-se entre as duas esferas, ficando estas com cargas finais Q_1 e Q_2. Por conservação da carga, sabemos que

$$Q_0 = Q_1 + Q_2$$

ligando as duas esferas com o fio condutor, o potencial nelas será idêntico ($V_1 = V_2$). Como o potencial na superfície de uma esfera é igual a kQ/r, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{kQ_1}{r_1} = \frac{kQ_2}{r_2} \quad \Longrightarrow \quad Q_1 = \frac{r_1}{r_2} Q_2$$

substituindo na equação anterior, obtemos

$$Q_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} Q_0 = 1,15 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}$$

e a carga na outra esfera é

$$Q_1 = \frac{r_1}{r_1 + r_2} Q_0 = 3,846 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}$$

3. Os campos de qualquer onda electromagnética no vazio são necessariamente perpendiculares entre si e perpendiculares à velocidade de propagação. Assim, num ponto P podemos definir os eixos x e y nas direcções de $\mathbf{B}$ e de $\mathbf{E}$, respectivamente

$$\mathbf{B} = B\,\mathbf{i} \qquad \mathbf{E} = E\,\mathbf{k}$$

além disso, sabemos também que $E = cB$. Usando a primeira e terceira equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

obtemos

$$\frac{\partial E}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = 0$$

e substituindo a relação $E = cB$, obtemos

$$\frac{\partial B}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial E}{\partial x} = 0$$

Como as derivadas parciais dos campos em ordem a x e z são nulas, os campos não dependem de x ou de z no ponto P. Se a onda for plana, a velocidade em qualquer outro ponto será na mesma direcção e o argumento anterior também será válido.

4. Num instante $t > 0$, a espira estará localizada na posição (unidades SI):

$$\begin{aligned} 3t \le y\ &\le 3t + 0,2 \\ z_0 \le z\ &\le z_0 + 0,3 \end{aligned}$$

O fluxo através da espira é igual a

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{3t}^{3t+0,2} \int_{z_0}^{z_0+0,3} (6-y) dz\, dy \\ &= 0,3 \left(6y - \frac{y^2}{2} \right)_{3t}^{3t+0,2} \\ &= 0,36 + 0,15[9t^2 - (3t+0,2)^2] \end{aligned}$$

A *fem* induzida é:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = 2,7t - 0,9(3t + 0,2) = -0,18$$

No instante $t = 0$, o fluxo magnético é no sentido do versor $\mathbf{i}$ e diminui. Assim, o aumento do fluxo é no sentido oposto a $\mathbf{i}$ e a lei de Lenz implica que o sentido da *fem* induzida seja anti-horário, visto desde o lado esquerdo. Em qualquer instante $t > 0$, a *fem* induzida é $0,18$ V, no sentido anti-horário visto desde a esquerda.

5. Como a carga volúmica não depende de θ nem de z, existe simetria cilíndrica e o campo será na direcção radial. Qualquer cilindro com eixo sobre o eixo dos z é uma superfície gaussiana. Aplicando a lei de Gauss obtemos o módulo do campo eléctrico:

$$E = \frac{4\pi k q_i}{A}$$

onde q_i é a carga dentro do cilindro gaussiano e A é a área onde existe fluxo, que neste caso é a superfície curva do cilindro de raio r e comprimento L

$$A = 2\pi r L$$

portanto, o módulo do campo eléctrico é

$$E = \frac{2kq_i}{rL}$$

Para calcular a carga interna é preciso considerar dois casos:

1. Pontos onde $r \le b$ (cilindro gaussiano com raio menor que b)

$$q_i = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^r ar(r\, dr\, d\theta\, dz) = \frac{2}{3}\pi a L r^3$$

e o módulo do campo é

$$E = \frac{4}{3}\pi k a r^2$$

2. Pontos onde $r \geq b$ (cilindro gaussiano com raio maior que b) .

$$q_i = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^b ar(r\,dr\,d\theta\,dz) = \frac{2}{3}\pi a L b^3$$

e o módulo do campo é

$$E = \frac{4\pi k a b^3}{3r}$$

3 Ano lectivo 1997-98

3.1 Exame do dia 16-1-98

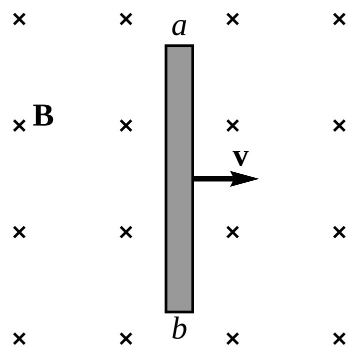
Docentes: Jaime Villate e Ana Paula Barbosa
Duração: 2 horas.
Pode responder em qualquer ordem e a lápis. Com consulta do formulário.

1. (3 valores) Considere uma onda electromagnética plana, polarizada linearmente na direcção do eixo dos x, que se propaga na direcção positiva do eixo dos y. A sua frequência é de 12 MHz e a sua amplitude é $E_o = 0,008$ V/m; (*a*) calcule o período e o comprimento de onda (*b*) escreva uma expressão para $\mathbf{E}(t)$ e para $\mathbf{B}(t)$.

2. (3 valores) A diferença de potencial entre os terminais de uma bateria é $4,5$ V quando a bateria é percorrida por uma corrente de 3 A, na direcção do terminal negativo para o positivo. Quando a corrente é de 2 A, na direcção oposta, a diferença de potencial aumenta até 12 V. (*a*) Calcule a resistência interna da bateria; (*b*) qual é a f.e.m. da bateria?

3. (4 valores) Calcula-se em geral a capacidade de um condensador plano desprezando os efeitos das bordas, isto é, supondo o campo interno uniforme e o campo externo nulo. Quando se consideram os efeitos de bordas, o valor exacto da capacidade é superior ou inferior a este valor aproximado? (justifique claramente a sua resposta).

4. (4 valores) Uma barra metálica de comprimento $l = 9$ cm desloca-se com velocidade uniforme $v = 18$ cm/s, dentro de um campo magnético uniforme $B = 3,5$ G, perpendicular à barra (ver figura). Calcule a diferença de potencial $V_a - V_b$.



5. (6 valores) Calcule o campo eléctrico produzido pela distribuição de carga (em unidades SI)

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{0,05}{r^2}\mathrm{e}^{-3r} & 0 \le r \le 0,1 \\ \\ 0 & 0,1 < r \end{cases}$$

3.2 Resolução do exame do dia 16-1-98

1. **1.** O período é o inverso da frequência:

$$P = \frac{1}{12 \cdot 10^6 \mathrm{Hz}} = 8,33 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}$$

E o comprimento de onda obtem-se a partir da frequência e da velocidade da luz

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{12 \cdot 10^6}\ \mathrm{m} = 25\,\mathrm{m}$$

2. A onda é harmónica, já que a sua frequência está bem definida. Para uma onda harmónica, propagando-se na direcção positiva do eixo dos y, o campo eléctrico tem a forma:

$$E = E_o \cos(ky - \omega t + \delta)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0,2513\,\mathrm{m}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi f = 75,40\,\mathrm{MHz}$$

onde δ é uma constante de fase. A direcção do campo é a direcção de polarização:

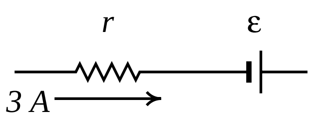
$$\mathbf{E} = 0,008 \cos(0,2513\, y - 75,40 \cdot 10^6 t + \delta)\,\mathbf{i}$$

(unidades SI). O campo magnético tem a direcção do produto vectorial entre a direcção de propagação ($\mathbf{j}$) e a direcção do campo eléctrico ($\mathbf{i}$ nos pontos onde a função co-seno for positiva), ou seja a direcção $-\mathbf{k}$. O seu módulo é igual ao módulo do campo eléctrico dividido por c:

$$\mathbf{B} = -\frac{0,008}{3 \cdot 10^8} \cos(0,2513\, y - 75,40 \cdot 10^6 t + \delta)\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = -2,67 \cdot 10^{-11} \cos(0,2513\, y - 75,40 \cdot 10^6 t + \delta)\,\mathbf{k}$$

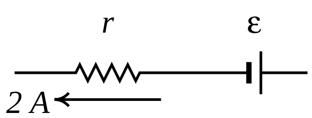
2. **1.** No primeiro caso temos o seguinte diagrama de circuito



onde r é a resistência interna e $\mathcal{E}$ a f.e.m. A diferença de potencial entre os terminais da bateria é

$$\Delta V = \mathcal{E} - 3r = 4,5\,\mathrm{V}$$

2. No segundo caso:



a diferença de potencial entre os terminais da bateria é agora

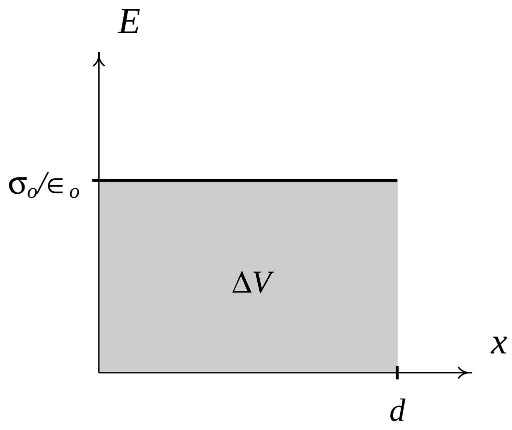
$$\Delta V = \mathcal{E} + 2r = 12\mathrm{V}$$

(no circuito repare que o sinal da diferença de potencial na f.e.m. e na resistência interna é o mesmo). Resolvendo as duas equações anteriores, encontramos os valores da f.e.m. e da resistência interna:

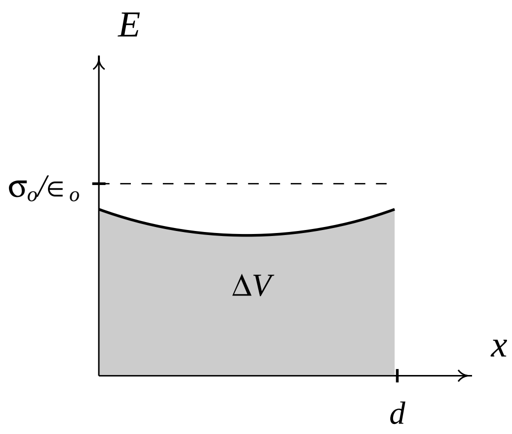
$$5r = 12 - 4,5 \qquad \Longrightarrow \qquad r = 1,5\Omega$$

$$\mathcal{E} = 3r + 4,5 = 9\mathrm{V}$$

3. Quando ignoramos os efeitos das bordas, admitimos que o campo eléctrico no condensador é constante, a densidade superficial de carga (σ_o) constante, e usando a lei de Gauss obtemos que $E = \sigma_o/\epsilon_o$. A diferença de potencial entre as armaduras é igual à área sob a curva do campo eléctrico:



em que x é a distância ao longo de uma linha de campo. A situação real, considerando efeitos das bordas, apresenta duas diferenças; por um lado, a medida que x aumenta, o campo diminui até $x = d/2$ e volta a aumentar, já que as linhas de campo afastam-se e voltam a juntarem-se. Por outro lado, a densidade superficial de carga já não é constante; acumulam-se mais cargas nas bordas e menos no centro. Existe ainda uma linha de campo perpendicular às armaduras (no centro) e ao longo dela o campo será na forma seguinte:



Consequentemente, a diferença de potencial diminui. A capacidade é dada por

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

a carga obviamente é constante (estamos ao olhar ao mesmo sistema numa forma mais realista) e portanto a capacidade é maior quando consideramos os efeitos das bordas.

4. Os electrões de condução vão sentir uma força magnética para baixo (regra da mão direita) de módulo

$$F_m = evB$$

Quando a barra atingir o equilíbrio electrostático, existirá um campo eléctrico para baixo, o qual produz uma força eléctrica para cima, sobre os electrões de condução, igual e oposta à força magnética

$$F_e = eE = evB \qquad \Longrightarrow \qquad E = vB$$

Como a força magnética sobre cada electrão é a mesma em qualquer ponto na barra, o campo eléctrico deverá ser constante e a diferença de potencial será

$$V_a - V_b = E d_{ab} = vBd_{ab} = (0,18)(0,09)(3,5 \cdot 10^{-4})\ \mathrm{V}$$

$$V_a - V_b = 5.67 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{V}$$

5. A distribuição de carga tem simetria esférica já que só depende da distância à origem (r). Assim, podemos aplicar a lei de Gauss para calcular o campo eléctrico, já que qualquer esfera com centro na origem será uma superfície Gaussiana. O fluxo a través das esferas Gaussianas é

$$\phi = 4\pi r^2 E = 4\pi k q_i \qquad \Longrightarrow \qquad E = \frac{k q_i}{r^2}$$

onde q_i é a carga no interior da esfera de raio r, a qual calcula-se por integração da densidade de carga dentro do volume da esfera. Temos dois casos: quando r é menor que $0,1$

$$q_i = 4\pi \int_0^r \rho\, r^2 dr = 4\pi(0,05) \int_0^r e^{-3r} dr = 0,2094(1 - e^{-3r})$$

$$E = 1,88 \cdot 10^9 \frac{1 - e^{-3r}}{r^2}$$

Quando r é maior ou igual a $0,1$ temos

$$q_i = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr = 4\pi(0,05) \int_0^{0,1} e^{-3r} dr = 0,2094(1 - e^{-0,3})$$

$$E = \frac{4,89 \cdot 10^8}{r^2}$$

Nos dois casos o campo é na direcção radial.

3.3 Exame do dia 30-1-98

Docentes: Jaime Villate e Ana Paula Barbosa
Duração: 2 horas.
Pode responder em qualquer ordem e a lápis. O formulário encontra-se no outro lado desta folha.

1. O campo eléctrico numa região do espaço é igual a (unidades SI)

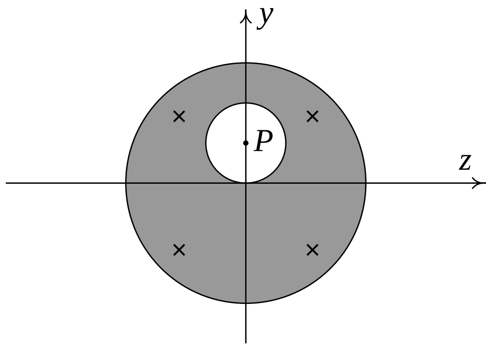
$$\mathbf{E} = 4xy\,\mathbf{i} + (2x^2 + 8yz^3)\,\mathbf{j} + 12y^2z^2\,\mathbf{k}$$

   1. (2 valores) Demonstre que o campo $\mathbf{E}$ é conservativo.

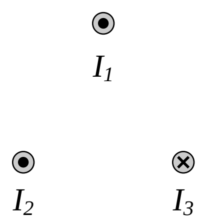
   2. (3 valores) Calcule o potencial electrostático (defina $V = 0$ na origem).

   3. (4 valores) Calcule a carga total dentro do cubo: $0 \leq x \leq 1\,cm$, $2\,cm \leq y \leq 3\,cm$ e $2\,cm \leq z \leq 3\,cm$.

2. (4 valores) A figura representa o corte transversal dum cilindro sólido, muito comprido, de raio $a = 9$ cm, que tem uma cavidade cilíndrica de raio $b = 3$ cm, como se mostra na figura. No cilindro flui uma corrente de densidade uniforme, $J = 21\,\mathrm{A/m^2}$. Calcule o campo magnético $\mathbf{B}$ no ponto P.



3. (3 valores) As correntes nos três fios na figura são $I_1 = 3$ A, $I_2 = 3$ A e $I_3 = 7$ A. Desenhe as linhas de campo magnético do sistema.



4. (4 valores) Se duas resistências forem ligadas em paralelo,

   1. a resistência equivalente é superior à mais forte, intermédia entre a maior e a mais pequena ou inferior à mais fraca?

   2. qual delas é atravessada pela corrente mais intensa?

   3. nos terminais de qual a diferença de potencial é maior?

   4. em qual é dissipada maior potência na forma de calor?

3.4 Resolução do exame do dia 30-1-98

1. **1.** Para demonstrar que o campo é conservativo, basta demonstrar que as *derivadas cruzadas* das três componentes do campo são iguais:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = 4x = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = 24yz^2 = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

2. O potencial no ponto (x, y, z) é igual a menos o integral de linha desde a origem (onde arbitramos $V = 0$) até o ponto:

$$\begin{aligned} V(x,y,z) &= -\int_0^x E_x(x,0,0)\,\mathrm{d}x - \int_0^y E_y(x,y,0)\,\mathrm{d}y - \int_0^z E_z(x,y,z)\,\mathrm{d}z \\ &= -\int_0^x 0\,\mathrm{d}x - 2x^2\int_0^y \mathrm{d}y - 12y^2\int_0^z z^2\,\mathrm{d}z \\ &= -2yx^2 - 4y^2z^3 \end{aligned}$$

3. A densidade de carga pode ser calculada a partir do campo eléctrico usando a forma diferencial da lei de Gauss

$$\begin{aligned} \rho &= \epsilon_o \nabla\cdot\mathbf{E} = \epsilon_o\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \\ &= \epsilon_o\left(4y + 8z^3 + 24y^2z\right) \end{aligned}$$

e a carga dentro do cubo obtem-se integrando a densidade de carga dentro do cubo

$$\begin{aligned} q &= \epsilon_0\int_{0,02}^{0,03}\int_{0,02}^{0,03}\int_0^{0,01}\left(4y + 8z^3 + 24y^2z\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{4\pi k}\Big[2\cdot 10^{-4}(0,03^2 - 0,02^2) + 2\cdot 10^{-4}(0,03^4 - 0,02^4) \\ &\quad +4\cdot 10^{-2}(0,03^3 - 0,02^3)(0,03^2 - 0,02^2)\Big] \\ &= 8,89\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \end{aligned}$$

(carga de aproximadamente 6 protões!).

2. A corrente no cilindro pode ser obtida por sobreposição de uma corrente uniforme num cilindro de raio a, com $J = 21\mathrm{A/m}^2$, mais outra corrente uniforme num cilindro de raio b, com $J = -21\mathrm{A/m}^2$. O campo magnético no ponto P calcula-se usando a lei de Ampère (a lei de Biot-Savart não pode ser usada por ser válida unicamente para fios unidimensionais). As linhas de campo produzidas por cada cilindro são círculos concêntricos com o respectivo cilindro e raio igual à distância entre o centro e o ponto P; assim para o cilindro de raio b o raio da linha de campo que passa por P é zero, e portanto a corrente interna I_c é também nula e o campo é zero. O campo total será só o campo produzido pelo cilindro de raio a a uma distância b desde o centro:

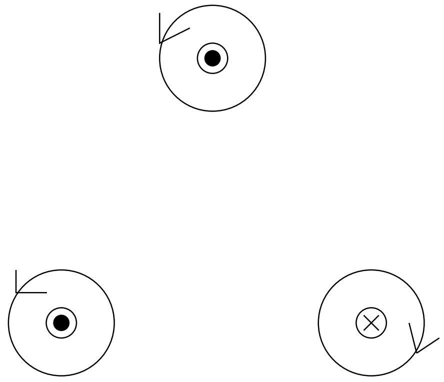
$$\int_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = 4\pi\, k_m I_c$$

$$2\pi\, bB = 4\pi k_m(\pi b^2 J)$$

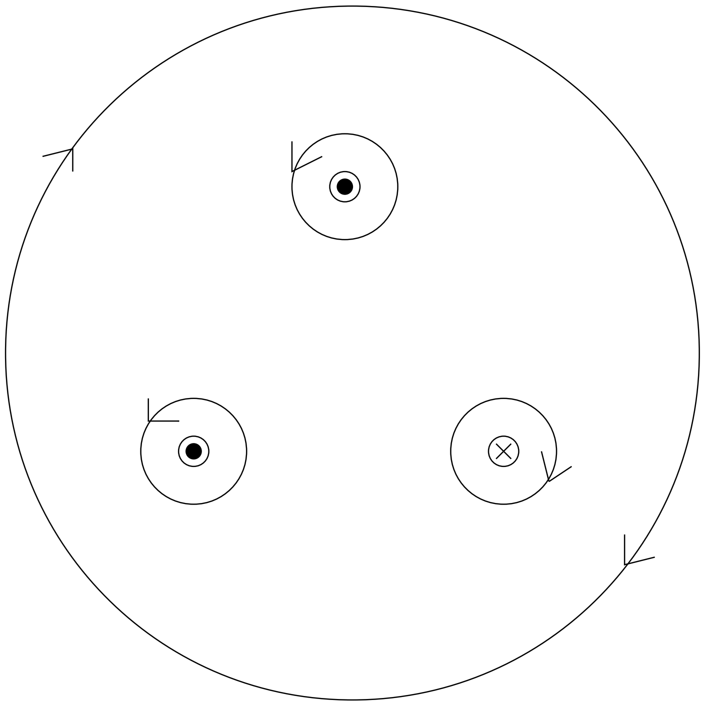
$$B = 2\pi\, bk_m J = 0,396\cdot 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

a direcção do campo obtem-se usando a regra da mão direita e segundo o desenho será a direcção do versor $\mathbf{k}$.

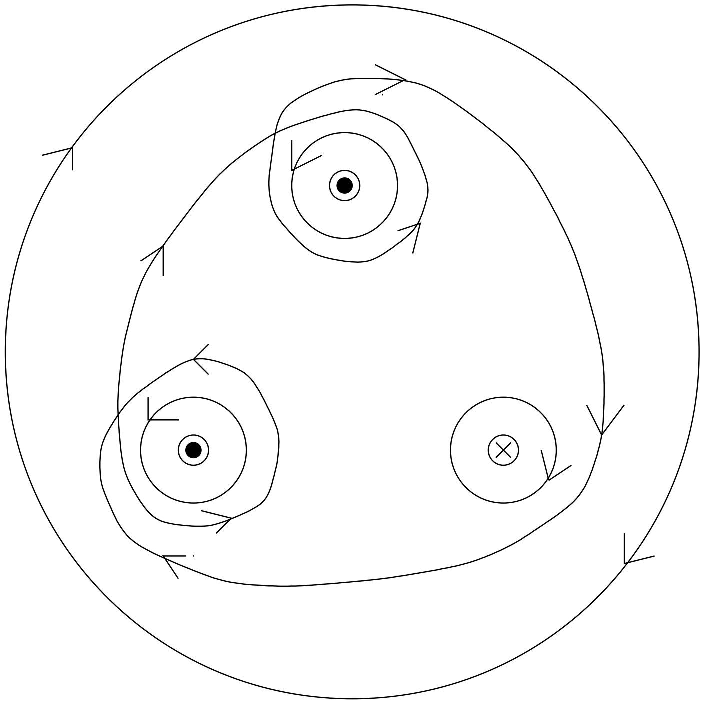
3. Perto de cada fio, o campo vai ser aproximadamente igual ao campo produzido pelo respectivo fio, e portanto as linhas de campo serão círculos orientados segundo a regra da mão direita:



a corrente total é (7 - 3 - 3) A = 1 A, para dentro da folha; vistos de longe, os três fios vão parecer um só fio com corrente de 1 A para dentro, cujas linhas de campo correspondem a círculos orientados no sentido horário:



finalmente, observamos regiões onde a direcção do campo sofre uma inversão, onde deverão necessariamente existir pontos de campo nulo, ou seja pontos onde as linhas de campo *aparentemente* se cruzam:



4. **1.** O inverso da resistência equivalente é

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

como $1/R_1$ e $1/R_2$ são números positivos, temos que

$$\frac{1}{R} > \frac{1}{R_1} \qquad \frac{1}{R} > \frac{1}{R_2}$$

e como as resistências são números positivos

$$R < R_1 \qquad R < R_2$$

a resistência equivalente é menor que a resistência mais fraca (menor que as duas resistências).

2. A diferença de potencial de duas resistências em paralelo é a mesma pela própria definição de resistências em paralelo. Usando a lei de Ohm temos que

$$\Delta V = I_1 R_1 = I_2 R_2$$

e concluímos que a resistência menor deverá ser atravessada pela corrente maior, para que o produto IR seja constante.

3. Como já foi dito na alínea anterior, a diferença de potencial é a mesma nas duas resistências.

4. A potência dissipada em cada resistência é

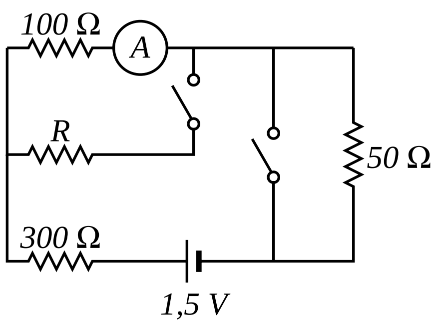
$$P_i = \Delta V I_i = \frac{\Delta V^2}{R_i}$$

como a diferença de potencial é a mesma nas duas resistências, a resistência que dissipa maior potência será a menor das duas.

3.5 Exame do dia 13-2-98

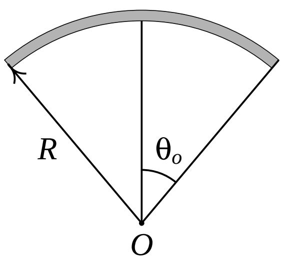
Docentes: Jaime Villate e Ana Paula Barbosa
Duração: 2 horas.
Pode responder em qualquer ordem e a lápis. O formulário encontra-se no outro lado desta folha.

1. (4 valores) No circuito que aparece na figura, a leitura do amperímetro é a mesma quando os dois interruptores estão abertos e quando os dois estão fechados. Calcule a resistência R.



2. (4 valores) Um condutor esférico oco tem raio interno a e externo b. Uma carga pontual positiva q está no centro da esfera e o condutor está descarregado. Calcule o potencial $V(r)$ em todos os pontos, admitindo que $V = 0$ em $r = \infty$, e desenhe o gráfico de $V(r)$.

3. (5 valores) Um fio condutor fino tem uma densidade linear de carga uniforme λ e está encurvado formando um arco circular que subtende um ângulo $2\theta_o$, conforme mostra a figura. Mostre que o campo eléctrico no ponto O tem módulo $E = (2k\lambda \sin \theta_o)/R$.



4. (4 valores) Uma espira quadrada de cobre, com 4 cm de lado encontra-se sobre a superfície horizontal de uma mesa. Um electroíman está colocado por cima da mesa, com o seu pólo norte um pouco acima e à esquerda da espira, de maneira que o campo magnético é aproximadamente uniforme e aponta para baixo através da espira, formando um ângulo de 30° com a vertical. Calcule a *fem* média induzida na espira a medida que o campo magnético varia desde zero até o seu valor final de 0.5 T, em 200 ms. Qual será a direcção da corrente induzida?

5. (3 valores) Defina: onda plana, onda polarizada e onda harmónica.