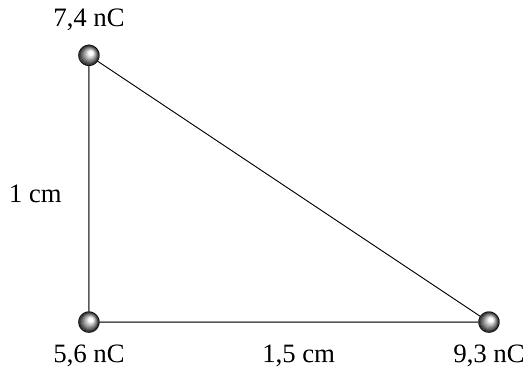
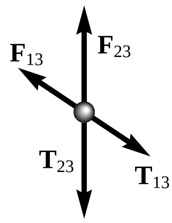
ELECTROMAGNETISMO **LEIC - 2002/2003**

Resolução do Exame do 3 de Julho de 2003. Autor: Jaime Villate

1. Três cargas pontuais estão ligadas por três fios, como mostra a figura. (*a*) Calcule a tensão no fio que liga as cargas de 7,4 nC e 9,3 nC. (*b*) Se a carga de 5,6 nC fosse retirada, a tensão calculada na alínea anterior manteria o mesmo valor? justifique claramente a sua resposta.



Resolução: (*a*) O diagrama de forças sobre a partícula de carga $7,4$ nC (designada de partícula número 3) é



onde $\boldsymbol{F}_{13}$ e $\boldsymbol{F}_{23}$ são as forças electrostáticas produzidas pelas partículas 1 e 2, de cargas $9,3$ nC e $5,6$ nC, respectivamente, e $\boldsymbol{T}_{13}$, $\boldsymbol{T}_{23}$ são as tensões nos fios que ligam a partícula 3 a essas duas cargas. Para que a partícula permaneça em equilíbrio é necessário que

$$F_{13} = T_{13} \qquad\qquad F_{23} = T_{23}$$

Assim, a tensão pedida é

$$T_{13} = F_{13} = \frac{k\; q_1 q_3}{d^2} = \frac{90 \cdot 7,4 \cdot 9,3}{1^2 + 1,5^2}\ \mu\text{N} = 1,9\ \text{mN}$$

(*b*) O valor da tensão permanece igual, pois como mostramos na alínea anterior, T_{13} não depende da força F_{23} com a partícula de $5,6$ nC.

2. Um fio cilíndrico de cobre, de raio b, conduz uma corrente distribuída de forma não-uniforme, com densidade de corrente $J = C\sqrt{r}$, onde C é uma constante e r é a distância até o eixo do cilindro. Calcule o campo magnético dentro e fora do fio, usando a lei de Ampère.

Resolução: Como a densidade de corrente depende unicamente de r, existe simetria cilíndrica e as linhas de indução magnética serão circunferências perpendiculares ao cilindro, com centro no seu eixo. Integrando o campo magnético numa dessas circunferências, M, de raio r, obtemos

$$\oint_{\text{M}} \boldsymbol{B} \cdot \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 2\pi r B$$

e segundo a lei de Ampère, o resultado anterior deverá ser igual a $4\pi k_m I_M$, onde I_M é a corrente através do círculo M. Assim,

$$B = \frac{2k_m I_M}{r}$$

Para calcular a corrente I_M, consideramos dois casos: se $r \le b$, integrando J no círculo M (em coordenadas polares) obtemos

$$I_M = \int\limits_{\mathrm{M}} C\sqrt{r}\,\mathrm{d}A = 2\pi C \int\limits_0^r r^{3/2}\,\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{5} C r^{5/2}$$

e o campo magnético dentro do cilindro será

$$\boldsymbol{B} = \frac{8\pi}{5} k_m C r^{3/2}\,\boldsymbol{e}_\theta$$

Fora do cilindro ($r > b$) a corrente que passa através do círculo M será a corrente que passa por todo o cilindro, obtida a partir do caso anterior, com $r = b$

$$I_M = \frac{4\pi}{5} C b^{5/2}$$

e, portanto, o campo é

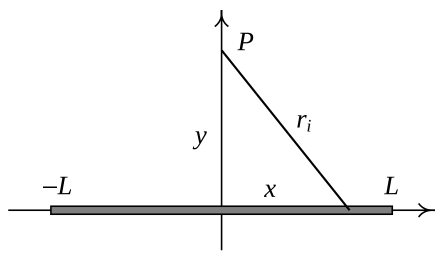
$$\boldsymbol{B} = \frac{8\pi k_m C b^{5/2}}{5r}\,\boldsymbol{e}_\theta$$

3. Um fio rectilíneo de comprimento $2L$ encontra-se entre os pontos $x = -L$ e $x = L$ sobre o eixo dos x. Sabendo que o fio tem uma carga linear não uniforme $\lambda = 3|x|$ (em nC/cm, se a distância x for medida em cm), calcule o potencial num ponto qualquer sobre o eixo dos y (arbitre potencial nulo no infinito).

Resolução: Para um ponto P qualquer, na posição $(0, y)$, a distância r_i até um ponto sobre o fio é (ver figura)

$$r_i = \sqrt{x^2 + y^2}$$

onde x é a posição do ponto sobre o fio.



a carga infinitesimal $\mathrm{d}q_i$ à volta dum ponto $(x, 0)$ sobre o fio é

$$\mathrm{d}q_i = 3|x|\,\mathrm{d}x$$

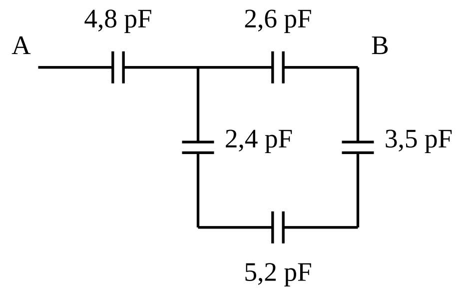
Assim, o potencial no ponto P é

$$V = k\int \frac{\mathrm{d}q_i}{r_i} = 900 \int\limits_{-L}^{L} \frac{3|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x$$

em que o potencial estará em volts, se as distâncias forem medidas em centímetros. O valor absoluto de x é $-x$, no intervalo de $-L$ até 0, e x no intervalo de 0 até L. Portanto, o integral é igual a

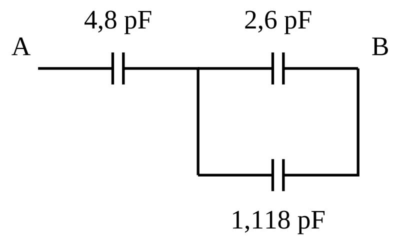
$$V = 5400 \int\limits_0^L \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x = 5400\left(\sqrt{x^2+L^2} - |y|\right)$$

4. (4 valores) Calcule a carga armazenada no condensador de 2,4 pF, quando existir uma diferença de potencial de 5 V entre os pontos A e B

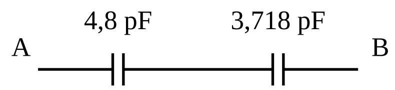


Resolução: Os condensadores de 2,4 pF, 5,2 pF e 3,5 pF estão em série, podendo ser substituídos por um único condensador com capacidade

$$\left(\frac{1}{2,4}+\frac{1}{5,2}+\frac{1}{3,5}\right)^{-1}=1,118$$



Os condensadores de 2,6 pF e 1,118 pF estão em paralelo, podendo ser substituídos por um único condensador com capacidade igual à soma das suas capacidades



assim, a capacidade equivalente entre A e B é

$$C_{AB}=\left(\frac{1}{4,8}+\frac{1}{3,718}\right)^{-1}=2,095$$

A carga total armazenada entre A e B é

$$Q_{AB}=5C_{AB}=10,47\ \mathrm{pC}$$

essa será a mesma carga armazenada em cada um dos condensadores de 4,8 pF e 3,718 pF, no circuito da figura acima. Assim, a diferença de potencial no condensador de 3,718 pF será:

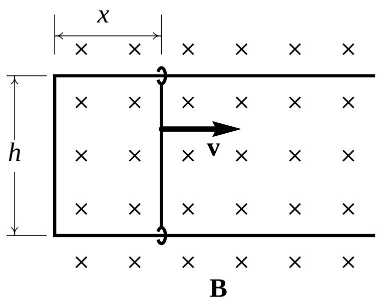
$$\Delta V=\frac{Q}{C}=\frac{10,47}{3,718}\ \mathrm{V}=2,816\ \mathrm{V}$$

essa será a diferença de potencial no sistema com os condensadores de 2,6 pF e 1,118 pF em paralelo. A carga no condensador de 1,118 pF é:

$$Q=C\Delta V=1,118\cdot 2,816\ \mathrm{pC}=3,15\ \mathrm{pF}$$

e essa é a resposta ao problema, pois é a carga em cada um dos três condensadores em série que foram substituídos por 1,118 pF.

5. (6 valores) Uma barra condutora desliza sobre dois carris metálicos compridos, horizontais, unidos numa extremidade. A distância h é igual a 3,3 cm, e no instante $t=0$ a barra encontra-se a uma distância $x=2,2\ \mathrm{cm}$ da extremidade dos carris. Em $t>0$ a velocidade da barra é uniforme, com módulo $v=3,5\ \mathrm{cm/s}$, no sentido indicado na figura, e mantendo o contacto eléctrico com os carris. (*a*) Sabendo que os carris e a barra são fios de cobre, cilíndricos, com 1,2 mm de diâmetro, calcule a resistência total do circuito, em função de t, para $t>0$ (admita que a resistividade do cobre é $17\ \mathrm{n\Omega\cdot m}$). (*b*) Sabendo que existe um campo magnético externo, constante e uniforme, com módulo $B=36$ G, no sentido indicado na figura, calcule a corrente no circuito em função do tempo t, para $t>0$.



Resolução: (*a*) O *circuito* neste caso é um rectângulo com arestas x e h. O comprimento total do fio que constitui o circuito é

$$L = 2x + 2h$$

A distância x aumenta com o tempo t segundo a equação:

$$x = x_0 + vt$$

onde $x_0 = 2,2\ \mathrm{cm}$ e $v = 3,5\ \mathrm{cm/s}$. A área da secção transversal do fio é $A = \pi r^2$, onde $r = 0,06\ \mathrm{cm}$ é o raio do fio. A resistência do fio que forma o circuito é

$$R = \frac{\varrho L}{A} = \frac{2\varrho(h + x_0 + vt)}{\pi r^2} = 1,65 + 1,05t$$

em $\mathrm{m\Omega}$, se t for medido em segundos.

(*b*) Na barra que se desloca, existe uma *fem* induzida:

$$\mathcal{E}_i = \int (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^h (Bv\,\boldsymbol{j}) \cdot \boldsymbol{j} dy = Bvh$$

a intensidade da corrente no circuito será

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{Bvh}{R}$$

aqui há que ter algum cuidado com as unidades. Na alínea (*a*) R foi obtida em $\mathrm{m\Omega}$. Se passarmos B para teslas, v para metros por segundo e h para metros, teremos I em quiloamperes. O resultado obtido é:

$$I = \frac{4,16}{1,65 + 1,05t}$$

em mA, se t for medido em segundos.