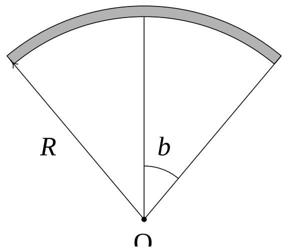
FÍSICA **LEQ/LEIC - 2001/2002**

Resolução do Segundo Exame (1/2/2002) Docente: Jaime Villate

1. (4 valores) Um fio fino tem carga linear uniforme λ e forma um arco circular que subtende um ângulo de $2b$, conforme indicado na figura. Calcule o potencial eléctrico no ponto O (arbitrando potencial nulo no infinito).



Resolução: Como não existe simetria, a lei de Gauss não será útil para calcular o campo eléctrico; o campo teria que ser calculado por integração, e para poder calcular o potencial integrando o campo seria preciso calcular o campo em qualquer ponto desde O até infinito (não adianta calcular o campo apenas em O). Mais fácil será calcular directamente o potencial no ponto O, usando o integral:

$$V = k \int\limits_{\text{fio}} \frac{\lambda}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \, \mathrm{d}s' \tag{1}$$

Definindo a origem em O, o eixo x para cima e o eixo y para a esquerda, o vector $\boldsymbol{r}$ é nulo e a posição de um ponto sobre o fio é

$$\boldsymbol{r}' = R\cos\theta\,\boldsymbol{i} + R\sin\theta\,\boldsymbol{j} \tag{2}$$

com $-b \leq \theta \leq b$ (θ será a variável de integração), e o seu módulo é obviamente R. O deslocamento infinitesimal será:

$$\mathrm{d}s' = R\ \mathrm{d}\theta\ , \tag{3}$$

substituindo no integral acima obtemos

$$V = k\lambda \int\limits_{-b}^{b} \mathrm{d}\theta = 2k\lambda b \tag{4}$$

2. (4 valores) Demonstre que quaisquer duas funções contínuas f e g verificam a identidade:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{\nabla}g) = \boldsymbol{\nabla}f\cdot\boldsymbol{\nabla}g + f\,\nabla^2 g$$

Resolução: O gradiente da função g é:

$$\boldsymbol{\nabla}g = \frac{\partial g}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\,\boldsymbol{k} \tag{5}$$

O produto de $f\boldsymbol{\nabla} g$ é um campo vectorial:

$$f\boldsymbol{\nabla} g = f\frac{\partial g}{\partial x}\boldsymbol{i} + f\frac{\partial g}{\partial y}\boldsymbol{j} + f\frac{\partial g}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{6}$$

a divergência desse campo vectorial é:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{\nabla} g) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial g}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(f\frac{\partial g}{\partial z}\right) & (7)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + f\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} & (8) \end{aligned}$$

Os três primeiros termos identificam-se facilmente como o produto escalar:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \tag{9}$$

que é igual a $\boldsymbol{\nabla} f \cdot \boldsymbol{\nabla} g$. Nos últimos 3 termos na equação **??** podemos factorizar f, e o que fica é o Laplaciano de g: $\nabla^2 g$. Assim, a equação **??** reduz-se à identidade que queria-mos demonstrar.

3. (4 valores) Uma esfera maciça de porcelana, com 8 cm de raio, tem uma carga electrostática de $3,82$ nC distribuída uniformemente em todo o seu volume. Calcule o módulo do campo eléctrico num ponto a 2 cm do centro. (a constante dieléctrica da porcelana é 7, caso o seu formulário não tenha essa informação.)

Resolução: Como existe simetria esférica, o fluxo do campo da esfera de porcelana, através de uma esfera de 2 cm concêntrica à esfera de porcelana será:

$$\Psi = \iint\limits_{\mathrm{S}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = E(4\pi r^2) = 5,027\cdot 10^{-3} E \tag{10}$$

no sistema SI de unidades. A lei de Gauss implica:

$$5,027\cdot 10^{-3} E = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon} \tag{11}$$

Onde ϵ é a permitividade eléctrica da porcelana:

$$\epsilon = K\epsilon_0 = 6,1979\cdot 10^{-11} \tag{12}$$

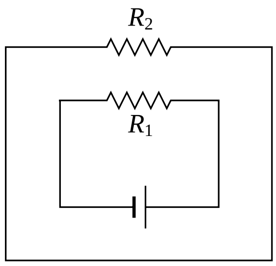
E q_{int} é a carga na região que está a 2 cm ou menos do centro:

$$q_{\text{int}} = \left(\frac{\frac{4}{3}\pi 0.02^3}{\frac{4}{3}\pi 0.08^3}\right) 3,82\cdot 10^{-9} = 59,69\cdot 10^{-12} \tag{13}$$

substituindo na equação **??**, obtemos o módulo do campo

$$E = 192\ \frac{\text{V}}{\text{m}} \tag{14}$$

4. (4 valores) Um condutor com resistência R_1, dobrado em forma rectangular, encontra-se ligado a uma fonte de tensão constante, como mostra a figura. A temperatura está a aumentar a uma taxa constante. (a) Em que sentido será a corrente induzida em R_2? (b) Se o tamanho do circuito com resistência R_2 fosse maior, a corrente induzida seria maior, menor ou igual? (a cotação deste problema será feita em função da sua justificação das respostas, independentemente das respostas serem verdadeiras ou falsas!)



Resolução: (a) A corrente no circuito de R_1 circula no sentido anti-horário; o aumento da temperatura implica um aumento na resistência e, por tanto, uma diminuição da corrente. Assim, a variação da corrente no circuito de R_1 é no sentido horário. Usando a regra da mão direita, essa variação da corrente implica uma variação do fluxo magnético para dentro da folha, dentro do circuito de R_1, e para fora da folha fora do circuito de R_1.

No interior do circuito de R_2 observa-se a variação do fluxo para dentro da folha, e uma parte do fluxo para fora da folha. Como o fluxo total é nulo (fluxo para dentro da folha igual ao fluxo para fora da folha), a variação total de fluxo observada no interior do circuito de R_2 é para dentro da folha.

Segundo a lei de Faraday, aparecerá um campo induzido no circuito de R_2, que segundo a lei de Lenz será para fora da folha (oposto à variação do fluxo). Usando a regra da mão direita, vemos que a corrente induzida em R_2 deverá ser no sentido anti-horário, para produzir um campo induzido para fora da folha.

(b) Se admitirmos que R_2 permanece constante quando o tamanho do circuito aumentar, o aumento ou diminuição da corrente induzida dependerá unicamente da variação da fem induzida. Aumentando o tamanho do circuito de R_2 continua a observar-se a mesma variação de fluxo dentro do circuito de R_1, mas uma maior variação de fluxo na parte de fora do circuito de R_1 (a área é maior). Isto implica que o fluxo para fora da folha é agora maior e mais parecido ao fluxo para dentro da folha; o fluxo total continuará a ser para dentro da folha, mas com um valor menor: a fem induzida será menor e a corrente induzida também será menor.

5. (4 valores) Considere dois fios de cobre, rectilíneos e paralelos, de 75 cm de comprimento, com raios de 2 mm e 3 mm, afastados 8 cm. Calcule o módulo da força magnética entre os fios quando cada um deles for ligado a uma fonte de $4,5$ V. (Use o valor da resistividade do cobre à temperatura ambiente: 17 n$\Omega \cdot$ m.)

Resolução: A resistência de cada fio calcula-se usando a fórmula

$$R = \frac{\varrho L}{A} = \frac{\varrho L}{\pi r^2} \tag{15}$$

a intensidade da corrente em cada fio obtem-se usando a lei de Ohm

$$I_1 = \frac{\Delta V}{R_1} = \frac{\Delta V \pi r_1^2}{\varrho L} \tag{16}$$

$$I_2 = \frac{\Delta V}{R_2} = \frac{\Delta V \pi r_2^2}{\varrho L} \tag{17}$$

Finalmente, o módulo da força magnética entre dois fios rectilíneos, paralelos, afastados uma distância d, e com comprimento L muito maior do que d, é dada por:

$$F = \frac{2k_\mathrm{m} L I_1 I_2}{d} = \frac{2k_\mathrm{m}}{Ld}\left(\frac{\pi \Delta V r_1 r_2}{\varrho}\right)^2 = 82,99 \text{ N} \tag{18}$$