**FÍSICA** **LEQ/LEIC - 2001/2002**

Resolução do Primeiro Exame (18/1/2002) Docente: Jaime Villate

**1.** (3 valores) Um electrão encontra-se no centro de um cubo cuja aresta mede 20 nm. Calcule o fluxo eléctrico através de uma face do cubo.

**Resolução:** O cubo é uma superfície fechada (embora não seja superfície gaussiana neste caso) e portanto o fluxo através do cubo pode ser calculado facilmente usando a lei de Gauss:

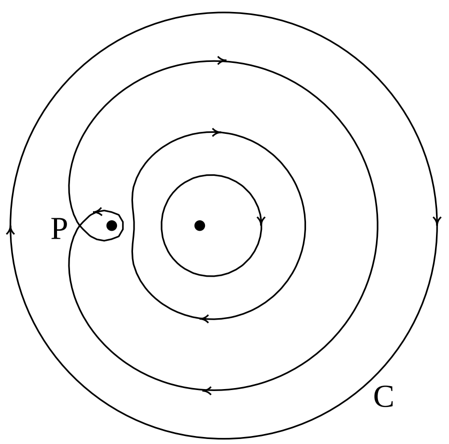
$$\oiint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{q_{\mathrm{int}}}{\epsilon} \tag{1}$$

A carga interna $q_{\mathrm{int}}$ é a carga do electrão ($-1,602 \cdot 10^{-19}$ C), e como o problema não fala de nenhum meio, admitimos que o electrão está no vazio e $\epsilon = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m. Assim, o fluxo através do cubo é:

$$\oiint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = -18,09\ \frac{\mathrm{nC} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{F}} \tag{2}$$

Por simetria, o fluxo em cada face deve ser o mesmo de maneira que o fluxo numa face é a sexta parte do fluxo no cubo: $-3,02$ nC $\cdot$ m/F (o sinal negativo indica que é para dentro do cubo).

**2.** (3 valores) No desenho que se segue, representam-se as linhas de indução magnética de dois fios rectilíneos (perpendiculares à folha) com correntes $I_1$ e $I_2$. A corrente no fio do lado esquerdo é $I_1 = 3$ A. Sabendo que a distância entre os dois fios é 6 cm, e a distância entre o fio do lado esquerdo e o ponto P (onde as linhas de indução se cruzam) é de 2 cm, calcule $\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ ao longo do círculo C indicado no desenho.




**Resolução:** A circulação do campo de indução magnética (integral que se pede para calcular), em qualquer percurso fechado, pode ser calculada usando a lei de Ampère:

$$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mu I_{\mathrm{C}} \tag{3}$$

A corrente $I_{\mathrm{C}}$ através do círculo C é igual a $I_2 - I_1$, já que o desenho das linhas de indução mostra que $I_2$ é no sentido positivo de C (para dentro da folha) e $I_1$ é no sentido oposto. Para calcular $I_1$ usamos o facto de o campo total ser nulo no ponto P; isso implica que no ponto P os campos produzidos pelos dois fios têm o mesmo módulo. Como o módulo do campo de cada fio é directamente proporcional à corrente e inversamente proporcional à distância, e como as distâncias dos fios até P são 2 cm e 8 cm, temos a seguinte relação:

$$\frac{I_1}{2} = \frac{I_2}{8} \tag{4}$$

e, portanto, $I_2$ é igual a 12 A, e $I_{\mathrm{C}} = 9$ A. Se admitirmos que não existe nenhuma substância à volta dos fios, $\mu$ é a permeabilidade do vazio e obtemos a resposta:

$$\oint\limits_{\mathrm{C}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}} = 11,3\,\frac{\mu\mathrm{N}}{\mathrm{A}} \tag{5}$$

**3.** (4 valores) Uma onda electromagnética plana propaga-se no sentido negativo do eixo dos $z$. Num dado instante $t = 0$ o campo eléctrico é $\boldsymbol{E} = 34\sin(3,25 \cdot 10^8 z)\,\boldsymbol{i}$, onde $z$ é medida em metros, e o campo é medido em N/C. Escreva a função que define o campo de indução magnética em qualquer ponto e em qualquer instante de tempo.

**Resolução**: a função que define o campo eléctrico em $t = 0$ indica que se trata de uma onda harmónica polarizada na direcção do versor $\boldsymbol{i}$. O campo eléctrico de uma onda harmónica plana, polarizada segundo $\boldsymbol{i}$, que se propaga no sentido negativo do eixo $z$, é:

$$\boldsymbol{E} = E_0 \sin(kz + \omega t + \delta)\,\boldsymbol{i} \tag{6}$$

substituindo $t = 0$ e comparando com o campo dado no enunciado, concluímos que:

$$\delta = 0 \qquad k = 3,25 \cdot 10^8 \qquad E_0 = 34 \tag{7}$$

$\omega/k$ deve ser igual à velocidade da luz (admitimos espaço vazio) que no sistema de unidades usadas é $3 \cdot 10^8$. Assim, $\omega = 9,75 \cdot 10^{16}$ e o campo eléctrico em qualquer ponto e em qualquer instante de tempo é:

$$\boldsymbol{E} = 34\sin(3,25 \cdot 10^8 z + 9,75 \cdot 10^{16} t)\,\boldsymbol{i} \tag{8}$$

o módulo do campo $\boldsymbol{B}$ é igual ao módulo do campo eléctrico, dividido pela velocidade da luz. O sentido de $\boldsymbol{B}$ deve garantir que o produto vectorial $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ seja na direcção de propagação ($-\,\boldsymbol{k}$); assim:

$$\boldsymbol{B} = -1,13 \cdot 10^{-7} \sin(3,25 \cdot 10^8 z + 9,75 \cdot 10^{16} t)\,\boldsymbol{j} \tag{9}$$

**4.** (5 valores) Um condensador de placas planas e paralelas distanciadas 2,5 cm e de 16 cm$^2$ de área, está totalmente preenchido por um dieléctrico. A constante dieléctrica do dieléctrico nos pontos que estão a uma distância $x$ de uma das placas, é dada pela expressão $K = 6/(x + 0,6)$, onde $x$ é medida em centímetros. Calcule a capacidade do condensador.

**Resolução:** No centro do condensador, as linhas de campo eléctrico são perpendiculares às armaduras e podemos admitir que o campo é igual à soma dos campos de dois planos infinitos com cargas superficiais iguais e opostas. Usando a equação para o campo de um plano infinito dada no formulário, o campo perto do centro do condensador é:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma}{K\epsilon_0} = \frac{\sigma(x+0,6)}{53,12\cdot 10^{-14}}\ \frac{\text{cm}}{\text{F}} \tag{10}$$

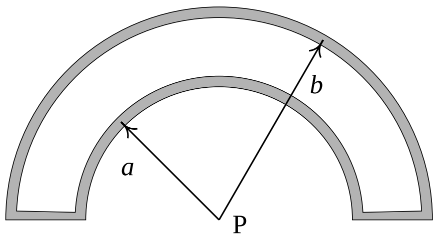
Para calcular $\sigma$ em forma aproximada, admitimos que a carga distribui-se uniformemente: $\sigma = Q/A = Q/16$. A diferença de potencial entre as armaduras obtem-se integrando o campo:

$$\Delta V = \int_0^{2,5} \frac{Q(x+0,6)}{8,499\cdot 10^{-12}}\,\mathrm{d}x \quad (\ \mathrm{F}^{-1}) = 5,442\cdot 10^{11} Q \quad (\ \mathrm{F}^{-1}) \tag{11}$$

Finalmente, a capacidade será:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 1,838\ \mathrm{pF} \tag{12}$$

**5.** (5 valores) O fio representado na figura tem uma carga linear constante, $\lambda$. Calcule o campo eléctrico no ponto P, o centro comum aos dois arcos semicirculares.




**Resolução:** As partes rectilíneas do fio vão produzir campos iguais e de sentido contrário e, portanto, a sua contribuição para o campo total em P será nula. Para calcular o campo produzido pelo semi-círculo de raio $a$, usaremos a equação

$$\boldsymbol{E}_a = k\int_{\text{fio}} \lambda \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,\mathrm{d}s' \tag{13}$$

Definindo a origem em P, o eixo $x$ para a direita e o eixo $y$ para cima, o vector $\boldsymbol{r}$ é nulo e a posição de um ponto sobre o fio é

$$\boldsymbol{r}' = a\cos\theta\,\boldsymbol{i} + a\sin\theta\,\boldsymbol{j} \tag{14}$$

com $0 \leq \theta \leq \pi$ ($\theta$ será a variável de integração), e o seu módulo é obviamente $a$. O deslocamento infinitesimal será:

$$\mathrm{d}s' = a\ \mathrm{d}\theta\ , \tag{15}$$

substituindo no integral acima obtemos

$$\boldsymbol{E}_a = -\frac{k\lambda}{a}\int_0^{\pi} (\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j})\,\mathrm{d}\theta \tag{16}$$

Os integrais do seno e do co-seno entre 0 e $\pi$ são, respectivamente, 2 e 0; portanto, o campo será

$$\boldsymbol{E}_a = -\frac{2k\lambda}{a}\,\boldsymbol{j} \tag{17}$$

Para o semi-círculo com raio $b$ aplica-se exactamente o mesmo raciocínio, com $b$ em vez de $a$. O campo total em P é:

$$\boldsymbol{E} = -2k\lambda \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \boldsymbol{j} \tag{18}$$